CAMBIO DI BASE

$\phi: V \to W$ lineare, $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ basi di V e $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ basi di W.

$$A_{\mathcal{V}', \mathcal{W}', \phi} = A_{\mathcal{W}, \mathcal{W}', id} \cdot A_{\mathcal{V}, \mathcal{W}, \phi} \cdot A_{\mathcal{V}', \mathcal{V}, id}$$

$\mathcal{V}' \to \mathcal{V} \to \mathcal{W} \to \mathcal{W}'$ $\qquad \phi = id \circ \phi \circ id$

$$A_{\mathcal{V}, \mathcal{V}', id} = \left(A_{\mathcal{V}', \mathcal{V}, id}\right)^{-1}$$

DETERMINANTE

- $rk(A) = \dim(\mathrm{Im}\ \phi) =$ max ordine di un minore quadrato invertibile
- A quadrata, $\det A \neq 0 \iff A$ è invertibile.

MATRICE INVERSA

A matrice quadrata, la matrice A^{-1} (se esiste) è quella matrice tale che $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} A$. Possiamo trovare A^{-1} in due modi:

- matrice dei cofattori
- $(A \mid I) \longrightarrow (I \mid A^{-1})$

tramite operazioni elementari sulle righe.

ESERCIZIO Sia $W = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ dove

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $f: W \to W$ lineare t.c.

$$f(w_1) = f(w_2) = w_1 - w_3$$
$$f(w_3) = w_2 - w_4$$
$$f(w_4) = k\, w_2 - w_4$$

(a) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, esiste una tale f?

Verifichiamo se le condizioni su f siano compatibili.

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 w_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + \frac{1}{2} I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV - II]{III + II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{IV}+\tfrac{1}{2}\mathrm{III}\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha_4 \\ \alpha_2 &= -2\alpha_3 - \alpha_4 = \alpha_4 \\ \alpha_3 &= -\alpha_4 \end{aligned}$$

Prendendo ad esempio $\alpha_4 = 1$ $\qquad -w_1 + w_2 - w_3 + w_4 = 0$.

Dato che f è lineare, $\quad -f(w_1) + f(w_2) - f(w_3) + f(w_4) = f(0) = 0$

$$\cancel{-(w_1 - w_3)} + \cancel{w_1 - w_3} - (w_2 - \cancel{w_4}) + (k w_2 - \cancel{w_4}) = 0$$

$$(k-1)\, w_2 = 0 \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k = 1$$

L'applicazione lineare f esiste $\iff k = 1$.

Inoltre, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ su dominio e codominio.

$f(w_1) = f(w_2) = w_1 - w_3$

$f(w_3) = w_2 - w_4 = w_2 - (w_1 + w_3 - w_2) = -w_1 + 2w_2 - w_3$

$w_1 + w_3 = w_2 + w_4 \implies w_4 = w_1 + w_3 - w_2$

$$A_{W,W,f} = \begin{pmatrix} \text{le colonne sono} \\ \text{le coordinate di} \\ f(w_i) \text{ nella base } W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO PER $f(w_1)$:

Le coordinate di $f(w_1)$ nella base W sono date da $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dove

$f(w_1) = a \cdot w_1 + b \cdot w_2 + c \cdot w_3$

$f(w_1) = w_1 - w_3 \implies a = 1,\ b = 0,\ c = -1$

(c) Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare t.c.

(i) $\phi(w_i) = f(w_i) \quad i = 1, 2, 3$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker \phi \quad \left(\iff \phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right)$

Esiste una tale ϕ?

Controlliamo se le condizioni siano compatibili, cioè se ci siano relazioni di dipendenza lineare tra i vettori $w_1, w_2, w_3, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\,(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 2 \neq 0$$

I vettori w_1, w_2, w_3, v sono indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}^4$.

$\Rightarrow \phi$ esiste (ed è unica).

(d) Scrivere la matrice di ϕ rispetto ad opportune basi.

Scegliamo la base $\mathcal{B} = \{ w_1, w_2, w_3, v \}$

$\phi(w_1) = f(w_1) = w_1 - w_3$

$\phi(w_2) = f(w_2) = w_1 - w_3$

$\phi(w_3) = f(w_3) = -w_1 + 2w_2 - w_3$

$\phi(v) = 0$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Scrivere la matrice di ϕ rispetto alle basi canoniche.

Usiamo le matrici di cambiamento di base.

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id}$$

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & v \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

matrice "facile"

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id} = \left(A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \right)^{-1}$$

"basta" trovare l'inversa dell'altra.

$$(A \mid I) \rightsquigarrow (I \mid A^{-1})$$

Vogliamo trasformare la matrice A nella matrice identità, usando operazioni elementari sulle righe.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} I/2 \\ II + I/2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ -III \\ II + III \\ IV - II \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ -IV \\ III + 2IV \end{array} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id} = \left(A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = A_{\mathcal{B},\mathcal{E},id} \cdot A_{\mathcal{B},\mathcal{B},\phi} \cdot A_{\mathcal{E},\mathcal{B},id}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{dopo qualche conto} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

F6.5 Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare di matrice rispetto alle basi canoniche

$$A_k = \begin{pmatrix} k-3 & k & k^2-1 \\ 2 & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Per quali valori di k, f_k è iniettivo? suriettivo?

$$\begin{aligned} f_k \text{ è suriettiva} &\iff \operatorname{Im}(f_k) = \mathbb{R}^3 \\ &\iff rk(A_k) = 3 \\ &\iff \det(A_k) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\det\begin{pmatrix} k-3 & k & k^2-1 \\ 2 & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} k-3 & k \\ 2 & k-2 \end{pmatrix} = (k-3)(k-2) - 2k$$
$$= k^2 - 5k + 6 - 2k$$
$$= k^2 - 7k + 6$$
$$= (k-6)(k-1)$$

$\det(A_k) \neq 0 \iff k \neq 1, 6$

f_k è suriettiva $\iff k \neq 1, 6$

f_k è iniettiva $\iff \ker f_k = \langle 0 \rangle$.

Inoltre siccome f_k va da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$, f_k è iniettiva $\iff$ è suriettiva.

(b) Determinare la cardinalità della controimmagine di $(1,-1,1)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

$k \neq 1,6$ $\quad f_k$ è biiettiva quindi $\left| f_k^{-1}\big((1,-1,1)\big) \right| = 1$.

$k = 1$ $\quad f_k^{-1}\big((1,-1,1)\big) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : f_k(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : A_k \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

R-C: il sistema ha soluzione ed è necessario un parametro per descrivere l'insieme delle soluzioni.

La cardinalità della controimmagine è infinita.

$k=6$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 35 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} 2\,\mathrm{I} \\ 3\,\mathrm{II} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 12 & 70 & 2 \\ 6 & 12 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 12 & 70 & 2 \\ 0 & 0 & -60 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} \\ \mathrm{II}+60\,\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 12 & 70 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

R-C: c'è un pivot nella colonna dei termini noti, quindi il sistema è impossibile.

La controimmagine di $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è vuota.