APPLICAZIONI LINEARI

DEF Siano V, W spazi vettoriali. Un'applicazione $\phi : V \to W$ si dice lineare se

(i) $\phi(v_1+v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

(ii) $\phi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_m\}$ è una base di W, la matrice di ϕ nella base $\mathcal{B}$ sul dominio e $\mathcal{B}'$ sul codominio è data da

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B}',\phi} = \left((\phi(v_1))_{\mathcal{B}'} \ \dots \ (\phi(v_n))_{\mathcal{B}'} \right)$$

coordinate del vettore $\phi(v_1)$ nella base $\mathcal{B}'$.

PROPRIETÀ

- (formula delle dimensioni) $\dim V = \dim(\ker \phi) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}\phi)}_{= rk(A)}$

  (è indipendente dalle basi scelte per V e W)

- $w \in W$, $\phi^{-1}(\{w\}) = \{v \in V \cdot \phi(v) = w\} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } w \notin \operatorname{Im}\phi \\ v + \ker\phi & \text{se } w \in \operatorname{Im}\phi \text{, dove } v \text{ è un qualsiasi vettore di } V \text{ t.c. } \phi(v) = w. \end{cases}$

- Per definire univocamente un'applicazione lineare basta farlo sui vettori di una qualsiasi base del dominio

  Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e supponiamo siano definite $\phi(v_1), \dots, \phi(v_n)$.
  Dato $v \in V$, l'immagine di v è univocamente determinata:
  infatti $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ per certi $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
  quindi

$$\begin{aligned}\phi(v) &= \phi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \phi(\alpha_1 v_1) + \dots + \phi(\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 \phi(v_1) + \dots + \alpha_n \phi(v_n)\end{aligned}$$

  dove abbiamo usato la linearità di ϕ.

F6.4 Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione $\phi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$\phi_h(x,y,z,t) = (x+2y+hz-t,\ (h-1)y+(1-h)t,\ x+3y+2z-ht).$$

(a) Scrivere la matrice di ϕ_h nelle basi canoniche.

$$A_h = \begin{pmatrix} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \phi(e_3) & \phi(e_4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \\ 1 & 3 & 2 & -h \end{pmatrix}$$

(b) Determinare $\ker \phi_h$ e $\operatorname{Im} \phi_h$ e le loro dimensioni.

$$\ker \phi_h = \{ v \in \mathbb{R}^4 : \phi_h(v) = 0 \} = \{ v \in \mathbb{R}^4 : A_h \cdot v = 0 \}$$

Determinare $\ker \phi_h$ è equivalente a risolvere il sistema $A_h \cdot x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \\ 1 & 3 & 2 & -h \end{pmatrix} \xrightarrow{III-I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \\ 0 & 1 & 2-h & -h+1 \end{pmatrix}$$

$h \neq 1$ $$\xrightarrow{\frac{1}{h-1} II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2-h & -h+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2-h & -h+2 \end{pmatrix}$$

$h \neq 1,2$ $$\xrightarrow{\frac{1}{2-h} III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R-C: lo spazio delle soluzioni dipende da un solo parametro.
$\Rightarrow \dim(\ker \phi_h) = 1$.

$$\begin{cases} x + 2y + hz - t = 0 \\ y - t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y - hz + t = -2t + ht + t = (h-1) \cdot t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

$$\ker \phi_h = \left\langle \begin{pmatrix} h-1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dalla formula delle dimensioni, $\dim(\ker \phi_h) + \dim(\operatorname{Im} \phi_h) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$
$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} \phi_h) = 3$

$\mathrm{Im}\,\phi_h$ è generata dai vettori corrispondenti alle variabili pivot:

$$\mathrm{Im}\,\phi_h = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\h-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}h\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3 .$$

$h=2$

$$\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&0&-1\\1&3&2&-2\end{pmatrix} \quad \begin{array}{c}\\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}\end{array}\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&0&-1\\0&1&0&-1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{c}\\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{II}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}&&\times&\times\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

R-C: $\dim(\ker\phi_2)=2$

$$\begin{cases} x+2y+2z-t=0 \\ y-t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2y-2z+t=-2t-2z+t=-t-2z \\ y=t \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}-t-2z\\t\\z\\t\end{pmatrix}$$

$$\ker\phi_2 = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle .$$

$$\dim(\mathrm{im}\,\phi_2) = 4-\dim(\ker\phi_2) = 2 \qquad \mathrm{im}\,\phi_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \right\rangle .$$

$h=1$

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&0&0\\1&3&2&-1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{c}\\ \mathrm{III}-\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}&&\times&\times\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

R-C: $\dim(\ker\phi_1)=2$

$$\begin{cases} x+2y+z-t=0 \\ y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-2y-z+t=2z-z+t=z+t \\ y=-z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}z+t\\-z\\z\\t\end{pmatrix}$$

$$\ker\phi_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim(\mathrm{im}\,\phi_1) = 2 \qquad \mathrm{im}\,\phi_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \right\rangle .$$

(c) Per $h=1,2$, trovare $\phi_h^{-1}\big((1,h,3)\big)$.

Vogliamo determinare i vettori $v\in\mathbb{R}^4$ t.c. $\phi_h(v)=\begin{pmatrix}1\\h\\3\end{pmatrix} \iff A_h\cdot v=\begin{pmatrix}1\\h\\3\end{pmatrix}$

Determinare la preimmagine di w è equivalente a risolvere il sistema $A_h\cdot x=w$.

$h=1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&-1&1\\0&0&0&0&1\\1&3&2&-1&3\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&1&-1&1\\1&3&2&-1&3\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

R-C: c'è un pivot nella colonna dei termini noti $\Rightarrow$ non ci sono soluzioni

$$\phi_1^{-1}\big((1,1,3)\big)=\emptyset .$$

$h=2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ III-I \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \times & \times \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

R-C: il sistema ha soluzione e l'insieme delle soluzioni è descritto da 2 parametri.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - t = 1 \\ y - t = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y - 2z + t + 1 = -4 - 2t - 2z + t + 1 = -t - 2z - 3 \\ y = 2 + t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3-2z-t \\ 2+t \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad \phi_2^{-1}\left((1,2,3)\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{confrontare con } \ker \phi_2}$$

Come previsto dalla teoria, $\phi^{-1}(w) = v + \ker \phi$

(d) Nel caso $h=1$, scrivere le matrici $A_{V, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}, \phi_1}$ e A_{V, W, ϕ_1}, dove

$$V = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

e $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

$$A_{V, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}, \phi_1} = \left((\phi(v_1))_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}} \quad \cdots \quad (\phi(v_4))_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}} \right)$$

$$\phi_1(x,y,z,t) = (x + 2y + z - t,\ 0,\ x + 3y + 2z - t)$$

$\phi_1(1,1,0,0) = (3,0,4)$ $\qquad \phi_1(0,1,1,0) = (3,0,5)$

$\phi_1(0,0,0,1) = (-1,0,-1)$ $\qquad \phi_1(0,0,1,0) = (1,0,2)$

$$A_{V, \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}, \phi_1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{V, W, \phi_1} = \left((\phi(v_1))_W \quad \cdots \quad (\phi(v_4))_W \right)$$

$\phi_1(v_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ queste sono le coordinate nella base canonica di $\mathbb{R}^3$. Vogliamo invece le coordinate nella base W, cioè vogliamo scrivere

$$\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a - b = 3 \\ a + 2c = 0 \\ 3c = 4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} b = 2a-3 = -16/3 - 3 = -25/3 \\ a = -2c = -8/3 \\ c = 4/3 \end{array}$$

Le coordinate del vettore $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ nella base W sono $\begin{pmatrix}-8/3\\-25/3\\4/3\end{pmatrix}$, quindi

$$(\phi(v_1))_W = \begin{pmatrix}-8/3\\-25/3\\4/3\end{pmatrix}$$

Allo stesso modo (provate!) determiniamo le altre colonne della matrice e otteniamo

$$A_{V,W,\phi_1} = \begin{pmatrix} -8/3 & -10/3 & -2/3 & -4/3 \\ -25/3 & -29/3 & -1/3 & -5/3 \\ 4/3 & 5/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO Determinare se esiste ϕ lineare soddisfacente le seguenti condizioni. In caso affermativo, determinarle tutte.

Idea generale: 1) Verificare che le condizioni date siano compatibili
2) " se ϕ sia stata definita su una base del dominio.
(In caso affermativo, ϕ è univocamente determinata. Altrimenti, abbiamo ancora libertà.

(a) $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\phi\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}_{v_1} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \phi\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad e \qquad \phi\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{v_3} = \begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

I vettori v_1, v_2 e v_3 non sono indipendenti in quanto $v_2 - v_1 = v_3$.
Siccome ϕ è lineare, otteniamo che deve valere

$$\phi(v_3) = \phi(v_2 - v_1) = \phi(v_2) - \phi(v_1)$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\k\end{pmatrix} = \qquad = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$ che è vera $\iff$ $k = -1$.

Se $k \neq -1$, le condizioni sono incompatibili e non esiste nessuna ϕ lineare.
Se $k = -1$, le condizioni sono compatibili. In questo caso abbiamo definito $\phi(v_1)$ e $\phi(v_2)$ ma non abbiamo ancora definito ϕ su una base di $\mathbb{R}^3$.
Completiamo i due vettori a base di $\mathbb{R}^3$, prendendo ad esempio $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
$\phi(v_1)$, $\phi(v_2)$ sono fissati.
$\phi(v_3)$ è arbitrario $\phi(v_3) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$
A questo punto ϕ è definita.
Esistono quindi infinite ϕ.

(b) $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\operatorname{Im}\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\phi = \mathbb{R}^2$

Le condizioni sono compatibili in quanto la formula delle dimensioni è verificata.

La condizione sul nucleo implica che $\phi(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Completiamo $\{v_1\}$ a base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Affinchè $\operatorname{im}\phi = \mathbb{R}^2$, dobbiamo far in modo che

$\langle \phi(v_1), \phi(v_2), \phi(v_3) \rangle = \mathbb{R}^2$

$\phi(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi $\langle \phi(v_2), \phi(v_3) \rangle = \mathbb{R}^2$

Basta scegliere $\phi(v_2)$ e $\phi(v_3)$ indipendenti. Ad esempio, $\phi(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\phi(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esistono infinite ϕ.