SOMMA DIRETTA: U, W sottospazi di V, diciamo che U e W sono in somma diretta se $U \cap W = \langle 0 \rangle$. In questo caso,

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \underbrace{\cancel{\dim(U \cap W)}}_{=0}$$

DESCRIZIONE DI SOTTOSPAZI: generatori $\longleftrightarrow$ eq. cartesiane (il sottospazio è definito come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare).

$\longleftarrow$ basta risolvere il sistema lineare.

$\longrightarrow$ 2 modi:
- equazioni parametriche;
- equazione generale.

F3.5(e) Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$:

$$W_1 = \langle 1+2x^2, \; x+x^3 \rangle \qquad W_2 = \langle 1+x^2, \; x^2 \rangle$$

(a) Determinare basi e dimensioni per W_1, W_2, W_1+W_2 e $W_1 \cap W_2$.

Dato $p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, possiamo associare a $p(x)$ il vettore di $\mathbb{R}^4$ corrispondente alle coordinate di $p(x)$ nella base $\{1, x, x^2, x^3\}$, e viceversa

$$p(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Quindi $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

[NOTA: Si può sempre fare

$$\mathbb{R}^{\leq k}[x] = \{ a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \; : \; a_k, \dots, a_0 \in \mathbb{R} \}$$

$\longleftrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ vettore delle coordinate del polinomio nella base $\{1, x, x^2, \dots, x^k\}$.]

W_1 $\dim W_1 = 2$ e una base è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\rightsquigarrow \{ 1+2x^2, \; x+x^3 \}$

W_2 $\dim W_2 = 2$ e una base è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\rightsquigarrow \{ 1+x^2, \; x^2 \}$

$W_1 \cap W_2$ $\quad v \in W_1 \cap W_2$

$$v \in W_1 \iff v = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\2\alpha\\\beta\end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\2\alpha\\\beta\end{pmatrix} \in W_2 \iff \exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \quad \gamma \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\2\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

$\iff$ il sistema di matrice $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \alpha\\0 & 0 & \beta\\1 & 1 & 2\alpha\\0 & 0 & \beta\end{array}\right)$ ha soluzione.

$$\begin{array}{c}\\ R_3 - R_1\\ R_2\\ \\\end{array}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \alpha\\0 & 1 & \alpha\\0 & 0 & \boxed{\beta}\\0 & 0 & \boxed{\beta}\end{array}\right)$$

R-C: il sistema ha soluzione $\iff$ non c'è pivot nella colonna dei termini noti $\iff \beta = 0$

$$v \in W_1 \cap W_2 \iff v = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\2\alpha\\0\end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ e una base è data da $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\rightsquigarrow \{1 + 2x^2\}$.

$W_1 + W_2$ $\quad W_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \qquad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{aligned}\dim(W_1+W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)\\ &= 2 + 2 - 1\\ &= 3 \quad \text{dalla formula di Grassmann.}\end{aligned}$$

$$W_1 + W_2 = \left\langle \underline{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}}, \underline{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}} \right\rangle$$

dato che sappiamo che $\dim(W_1+W_2) = 3$, basta scegliere 3 vettori indipendenti.

Una base di $W_1 + W_2$ è data da
$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

$\rightsquigarrow \{1 + 2x^2,\ x + x^3,\ x^2\}$

(b) Determinare eq. cartesiane per W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

W_1 metodo dell'equazione generale: scriviamo un'equazione generica della forma $ax + by + cz + dt = 0 \quad (\star)$

soddisfatta da tutti e soli i vettori di W_1.
Ciò è equivalente a chiedere che (*) sia sodolisfatta dai generatori di W_1.

$$W_1 = \left\langle \overset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$\begin{array}{l} w_1 \rightsquigarrow \\ w_2 \rightsquigarrow \end{array} \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases} \quad : \quad \begin{cases} a = -2c \\ b = -d \end{cases}$$

$ax+by+cz+dt=0$ descrive $W_1 \iff$
$$(a,b,c,d) = (-2c, -d, c, d)$$
$$= c(-2,0,1,0) + d(0,-1,0,1)$$

Equazioni per W_1: $\begin{cases} -2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \end{cases}$

(Esistono infinite altre possibilità $\begin{cases} -2x - y + z + t = 0 \\ -2y + 2t = 0 \end{cases}$)

$\rightsquigarrow$ $W_1 = \left\{ dx^3 + cx^2 + bx + a : \begin{cases} -2a + c = 0 \\ -b + d = 0 \end{cases} \right\}$

W_2 metodo delle equazioni parametriche: scriviamo la forma parametrica di un vettore generico di W_2 ed "eliminiamo" i parametri.

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha+\beta\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in W_2 \iff \begin{cases} x = \alpha \\ \boxed{y = 0} \\ z = \alpha + \beta \\ \boxed{t = 0} \end{cases}$$

$\alpha = x$

$\beta = z - \alpha = z - x$

DOMANDA: potevamo prevedere il numero di equazioni necessarie per descrivere W_2?

W_2 : $\begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $W_2 = \left\{ dx^3 + cx^2 + bx + a : \begin{array}{l} b = 0 \\ d = 0 \end{array} \right\}$

$W_1 \cap W_2$ $v \in W_1 \cap W_2 \iff v$ sodolisfa sia le equazioni che descrivono W_1, sia quelle che descrivono W_2.

Quindi basta "unire" le equazioni.

$$W_1 \cap W_2 : \begin{cases} -2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad : \quad \begin{cases} -2x + z = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

W_1+W_2 $\quad W_1+W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

$W_1 \cap W_2 = \left\{ dx^3 + cx^2 + bx + a : \begin{array}{l} -2a + c = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{array} \right\}$

$$\begin{cases} x = \alpha & \alpha = x \\ y = \beta & \beta = y \\ z = 2\alpha + \gamma & \gamma = z - 2\alpha = z - 2x \\ t = \beta & \rightsquigarrow t = \beta = y \Rightarrow t = y \end{cases}$$

$W_1 + W_2 : \quad y - t = 0$

$\rightsquigarrow \quad W_1 + W_2 = \{ dx^3 + cx^2 + bx + a \cdot \ b - d = 0 \}$.

F4.6 Considerate

$V = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(a) Calcolare $\dim V$.

$$a \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} R_2 \\ R_1 + 3R_2 \\ R_3 + R_2 \\ R_4 - 4R_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3 - \frac{1}{2}R_2 \\ R_4 + R_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R-C: l'insieme delle soluzioni dipende da un numero di parametri pari al numero di variabili non-pivot. Inoltre, i vettori sono indipendenti se e solo se il sistema ha un'unica soluzione (il vettore nullo). Allora abbiamo una base quando tutte le variabili sono pivot e dunque basta selezionare i vettori corrispondenti alle variabili pivot.

$\dim V = 2$ e una base e' data da $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Trovare un sottospazio V' di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $V \leq V'$ e $\dim V' = \dim V + 1$.

$V' = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

scegliamo una qualsiasi matrice che non appartenga a $\left\langle \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(c) Trovare equazioni cartesiane per V'.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in V' \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3\alpha + \beta + \gamma \\ x_2 = -\alpha + \beta \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = 4\alpha + 2\beta \end{cases}$$

$\alpha = \beta - x_2$

$x_3 = \alpha + \beta = \beta - x_2 + \beta$

$\beta = \frac{x_2 + x_3}{2}$

$\alpha = \beta - x_2 = \frac{x_2 + x_3}{2} - x_2 = \frac{x_3 - x_2}{2}$

$\gamma = x_1 - 3\alpha - \beta$

$= x_1 - \frac{3}{2}(x_3 - x_2) - \frac{x_2 + x_3}{2}$

$x_4 = 4\alpha + 2\beta$

$= 2(x_3 - x_2) + x_2 + x_3$

$-x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : -x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$