EALG - Tutorato 3

Titolo nota 24/03/2022

BASI DI SPAZI VETTORIALI

DEF V spazio vettoriale

Un insieme finito di vettori di V $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice base di V se

(i) i vettori sono lin. indipendenti; $\longrightarrow$ se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

(ii) " generano V. $\longrightarrow$ $\forall v \in V$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = v$.

Definiamo dim V = # vettori in una qualsiasi base di V = n

ben definito, perchè due basi di V hanno sempre lo stesso numero di vettori.

- insieme di generatori di V $\xrightarrow{\text{togliendo vettori}}$ base di V
- " vettori ind. di V $\xrightarrow[\text{aggiungendo vettori}]{}$ base di V

- Formula di Grassmann: Dati U, W sottospazi di V
$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

F3.4 (e) Determinare una base di W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$, e le rispettive dimensioni.

$W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z - t = 0\}$

W_1 è dato come spazio delle soluzioni di un sistema lineare.

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\4\\4\end{pmatrix} \right\rangle$$

W_2 è dato come sottospazio generato da vettori.

W_1 $x + 2y + z - t = 0$

$$\begin{array}{cccc} & \times & \times & \times \\ (1 & 2 & 1 & -1) \end{array}$$

$x = -2y - z + t = -2c - b + a$

$y = c$

$z = b$

$t = a$

R-C: Lo spazio delle soluzioni dipende da 3 parametri, corrispondenti alle variabili non-pivot.

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -2c-b+a \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_3} \right\rangle .$$

- v_1, v_2, v_3 generano W_1.
- sono lin. indipendenti? $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

I vettori ottenuti dalla risoluzione del sistema in questo modo sono sempre indipendenti.

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases} : \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di W_1 e $\dim(W_1) = 3$.

(W2) $$W_2 = \left\langle \overset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}}, \overset{w_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \overset{w_4}{\begin{pmatrix}3\\0\\2\\0\end{pmatrix}}, \overset{w_5}{\begin{pmatrix}5\\0\\4\\4\end{pmatrix}} \right\rangle .$$

I vettori sono indipendenti?
No, perchè W_2 è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ e quindi $\dim(W_2) \le \dim(\mathbb{R}^4) = 4$.

METODO 1: Dato un vettore, lo aggiungiamo alla base se è linearmente indipendente da quelli già aggiunti, altrimenti lo scartiamo.

Posso aggiungere w_1 alla base? ✓ $w_1 = (1,0,0,0)$
" w_2 " ? ✓ $w_2 = (1,0,1,2)$, perchè w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti.

NOTA 1: Due vettori sono indip. $\iff$ non sono multipli uno dell'altro.
Infatti se v_1, v_2 sono dipendenti, esiste $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ tale che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Supponiamo $\alpha_1 \neq 0$ (il caso $\alpha_2 \neq 0$ è identico), allora $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2$, quindi v_1 è multiplo di v_2.

NOTA 2: Con più di due vettori, ci sono altre possibilità. Esempio: $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,1,0,0)$ $u_3 = (1,1,0,0)$ sono dipendenti ($u_3 = u_1 + u_2$) ma nessuno è multiplo dell'altro.

w_3? $$a \cdot \overset{w_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} + b \cdot \overset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}} + c \cdot \overset{w_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

$a = 0$ $\quad b = 0$ $\quad c = 0$

quindi i vettori $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ sono indipendenti e aggiungiamo $\bar{w}_3$ alla base.

$\bar{w}_4$?

$$\underset{\bar{w}_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} \quad \underset{\bar{w}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}} \quad \underset{\bar{w}_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}} \quad \underset{\bar{w}_4}{\begin{pmatrix}3\\0\\2\\0\end{pmatrix}}$$

$$\bar{w}_4 = 2\bar{w}_3 + \bar{w}_1 + 0\cdot\bar{w}_2 \Rightarrow \bar{w}_4 \in \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \rangle$$

quindi NON aggiungiamo $\bar{w}_4$.

$\bar{w}_5$?

$$1\cdot \underset{\bar{w}_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} + 2\cdot \underset{\bar{w}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}} \overset{(2)}{+2\cdot} \underset{\bar{w}_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}} \qquad \underset{\bar{w}_5}{\begin{pmatrix}5\\0\\4\\4\end{pmatrix}}$$

$$\bar{w}_5 = \bar{w}_1 + 2\bar{w}_2 + 2\bar{w}_3 \Rightarrow \bar{w}_5 \in \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3 \rangle$$

quindi NON aggiungiamo $\bar{w}_5$.

$\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ è una base per W_2 e $\dim(W_2) = 3$.

METODO 2 riduzione a gradini

$$\alpha_1 \bar{w}_1 + \alpha_2 \bar{w}_2 + \alpha_3 \bar{w}_3 + \alpha_4 \bar{w}_4 + \alpha_5 \bar{w}_5 = 0 \leftarrow$$

$$A = (\bar{w}_1 \ \ \bar{w}_2 \ \ \bar{w}_3 \ \ \bar{w}_4 \ \ \bar{w}_5)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{riduzione a gradini}} \begin{array}{ccccc} & & & \times & \times \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R-C : 3 pivot, 2 non-pivot $\Rightarrow$ lo spazio delle soluzioni dipende da 2 parametri corrispondenti alle variabili non-pivot.

Quindi l'insieme dei vettori INIZIALI corrispondenti alle variabili pivot è una base di W_2.

$$(\bar{w}_1 \ \ \bar{w}_2 \ \ \bar{w}_3) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R-C: il sistema ha un'unica soluzione (tutti i coefficienti nulli) quindi $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$ sono lin. indipendenti.

$W_1 + W_2$

$$W_1 + W_2 = \Big\langle \overbrace{\underset{\bar{v}_1 \checkmark}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{\bar{v}_2 \checkmark}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\bar{v}_3 \checkmark}{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}}}^{\text{base di } W_1}, \overbrace{\underset{\bar{w}_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{\bar{w}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}}, \underset{\bar{w}_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}}^{\text{base di } W_2} \Big\rangle$$

ha base $\mathcal{B} = \{ v_1 , v_2 , v_3 , w_1 \}$

non serve controllare w_2, w_3 perchè un insieme di vettori lin. ind. in $\mathbb{R}^4$ ha cardinalità al più 4.

$\dim(W_1 + W_2) = 4$ (cioè $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$).

$W_1 \cap W_2$ Grassmann: $\underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_{4} = \underbrace{\dim(W_1)}_{3} + \underbrace{\dim(W_2)}_{3} - \dim(W_1 \cap W_2)$

$\Rightarrow \dim(W_1 \cap W_2) = 2$.

$w \in W_2$? $\quad w = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 0 \\ b+c \\ 2b \end{pmatrix}$

$w \in W_1$? $\quad W_1 = \{ \quad : x + 2y + z - t = 0 \}$

$w \in W_1 \Leftrightarrow (a+b+c) + 2 \cdot 0 + (b+c) - (2b) = 0$

$a + \cancel{b} + c + \cancel{b} + c - 2\cancel{b} = 0$

$a = -2c$

$w \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow w = \begin{pmatrix} b-c \\ 0 \\ b+c \\ 2b \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $W_1 \cap W_2$ (e $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$).

F 3.12 (c) Sia $\{ v_1, \dots, v_n \}$ base di V. Dimostrare che $\{ v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + v_n \}$ è base di V.

Dimostriamo che $v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+v_n$ sono lin. indipendenti.

Supponiamo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_1 + v_2) + \dots + \alpha_n (v_1 + v_n) = 0 \longrightarrow$ vogliamo dimostrare che $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n = 0$

Dato che $\{ v_1, \dots, v_n \}$ è base di V,

$$\begin{cases} \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

quindi $v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+v_n$ sono indipendenti.

Dato che abbiamo n vettori indipendenti e $\dim(V) = n$, tali vettori devono anche essere generatori di V. Quindi $\{ v_1, v_1+v_2, \dots, v_1+v_n \}$ è una base di V.