EALG - Tutorato 2

Titolo nota 17/03/2022

SOTTOSPAZIO VETTORIALE

DEF V spazio vettoriale. $U \subseteq V$ non vuoto è un sottospazio di V se le operazioni di somma e prodotto per scalare definite su V inducono su U una struttura di spazio vettoriale.

CRITERIO Un sottoinsieme U non vuoto di V è sottospazio vettoriale

$\Leftrightarrow$ (i) $\forall v, w \in U$, $v + w \in U$ chiusura rispetto alla somma di vettori

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in U$, $\lambda v \in U$ " " al prodotto per scalare

[Parte fuori programma, in risposta alla domanda di uno studente.

Esiste una formulazione equivalente del criterio:

un sottoinsieme U non vuoto di V è sottospazio vettoriale

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall v, w \in U \quad \lambda v + w \in U.$ $(\star)$

Notate infatti che, dato che $U \neq \emptyset$, esiste $v \in U$.

Prendendo $\lambda = -1$, v, $w = v$ in $\star$, otteniamo $-v + v = 0 \in U$.

Prendendo $\lambda = 1$, v, w in $\star$, otteniamo $v + w \in U$ cioè (i).

Prendendo λ, v, $w = 0$ in $\star$, otteniamo $\lambda v \in U$ cioè (ii).]

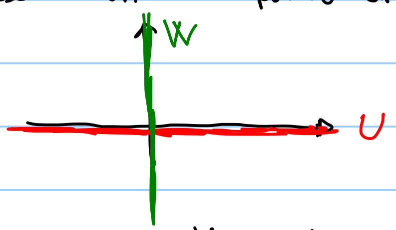
Dati U, W sottospazi di V,

- $U \cap W$ è sempre un sottospazio di V
- l'unione di U e W potrebbe non essere un sottospazio di V.

ESEMPIO: $V = \mathbb{R}^2$

$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

$W = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$



$U \cup W$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

- $U + W$ è il più piccolo sottospazio di V contenente $U \cup W$.

Si può dimostrare che $U + W = \{ u + w : u \in U, w \in W \}$.

ESERCIZIO 1 Verificare se i seguenti sottoinsiemi siano sottospazi. In caso affermativo, trovare un insieme di generatori.

(a) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 4x - y + z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Siccome ogni sottospazio contiene il vettore nullo, conviene verificare se $0_V \in V$. In caso affermativo, abbiamo mostrato che $U \neq \emptyset$; altrimenti abbiamo mostrato che U non è un sottospazio.

Usiamo il criterio del sottospazio.

- $U \neq \emptyset$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ ✓

- chiusura per somma: Siano $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ vettori di U

  verifichiamo se $v + w = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \in U$?

  $4x - y + z = 0$ $\qquad$ $4x' - y' + z' = 0$

  $3x - 2y - 3z = 0$ $\qquad$ $3x' - 2y' - 3z' = 0$

  $v + w \in U \iff \begin{array}{l} 4(x+x') - (y+y') + (z+z') = 0 \quad \text{e} \\ 3(x+x') - 2(y+y') - 3(z+z') = 0 \end{array}$

  $\underbrace{4x - y + z}_{=0} + \underbrace{(4x' - y' + z')}_{=0} = 0$ ✓ $\qquad$ $\underbrace{(3x - 2y - 3z)}_{=0} + \underbrace{(3x' - 2y' - 3z')}_{=0} = 0$ ✓

- chiusura per prodotto per scalare: siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$

  verifichiamo se $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

  $\lambda v \in U \iff \begin{array}{l} 4(\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) = 0 \quad \text{e} \\ 3(\lambda x) - 2(\lambda y) - 3(\lambda z) = 0 \end{array}$

  $\lambda \underbrace{(4x - y + z)}_{=0} = 0$ ✓ $\qquad$ $\lambda \underbrace{(3x - 2y - 3z)}_{=0} = 0$ ✓

Quindi U è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Troviamo un insieme di generatori per U.

U è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare (omogeneo)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 4x - y + z = 0 \\ 3y - 2y - 3z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad 4\,II \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 12 & -8 & -12 \end{pmatrix} \quad II - 3I \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \text{non pivot} \\ & & \times \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \end{array}$$

RC: il sistema ha soluzione e il numero di parametri necessari per descrivere le soluzioni è 1.

$$\begin{cases} 4x - y + z = 0 \\ -5y - 15z = 0 \end{cases}$$

$z = t$

$y = -3z = -3t$

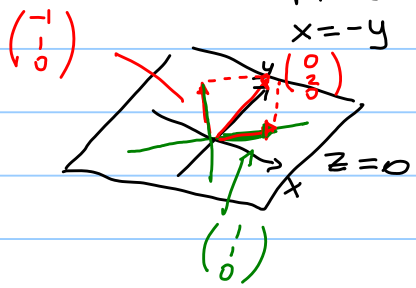
$4x = y - z = -3t - t = -4t \Rightarrow x = -t$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Tutti i multipli di $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono vettori di U e viceversa ogni vettore di U è un multiplo di $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di U.

(b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : |x| = |y| \right\}$

$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ oppure $x = -y$



- $W \neq \emptyset$ perché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$.
- chiusura per somma: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in W$

È vero che $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \in W$?

Sappiamo $|x| = |y|$ e $|x'| = |y'|$

È vero che $|x+x'| = |y+y'|$? No, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$,

ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$.

Quindi W non è un sottospazio.

(c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \begin{array}{l} b = d - e \\ a = -3c \end{array} \right\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Usiamo il criterio del sottospazio.

- $S \neq \emptyset$ perché $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$
- chiusura per somma: siano $v, w \in S$

$v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} b = d - e \\ a = -3c \end{array}$ $\qquad w = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} b' = d' - e' \\ a' = -3c' \end{array}$

$v + w = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ d+d' & e+e' & f+f' \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} b+b' = (d-e) + (d'-e') = (d+d') - (e+e') \\ a+a' = -3c - 3c' = -3(c+c') \end{array}$

$\Rightarrow v + w \in S$.

- chiusura per prodotto per scalare: siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in S$

$$v = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} b = d - e \\ a = -3c \end{matrix}$$

$$\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda b = \lambda(d-e) = \lambda d - \lambda e \\ \lambda a = \lambda(-3c) = -3(\lambda c) \end{matrix}$$

$\Rightarrow \lambda v \in S$

Quindi S è un sottospazio di $M_{2\times3}(\mathbb{R})$.

Troviamo i generatori di S.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} : \begin{matrix} b = d - e \\ a = -3c \end{matrix} \right\}$$

Generatori di $M_{2\times3}(\mathbb{R})$?

$$M_{2\times3}(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c & d - e & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$= c \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ESERCIZIO 2

Considerate

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad T = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) È vero che $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in T$?

$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in T \iff \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ si può scrivere come combinazione lineare dei generatori di T.

$$\iff \exists\, a, b \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \text{il sistema } \begin{cases} 2a + b = 5 \\ -a + b = -4 \\ -b = 2 \end{cases} \text{ ha soluzione}$$

$4 - 2 = 5$, falso

$a = b + 4 = 2$

$b = -2$

Il sistema non ha soluzione quindi $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \notin T$.

(b) Trovare $k \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in T$.

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in T \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2a + b = k \\ -a + b = 0 \\ -b = 3 \end{cases} \text{ ha soluzione}$$

$-6 - 3 = k$

$a = b = -3$

$b = -3$

$$\iff k = -9.$$

(c) Trovare generatori di $S+T$, $S \cap T$.

$S+T$: dati un insieme di generatori di S e un insieme di generatori di T, allora l'unione dei due insiemi è un insieme di generatori di $S+T$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$S \cap T$ $\quad v \in S \cap T \iff v \in S, \; v \in T$

Metodo 1: $v \in S \iff v = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ -12\beta \\ 7\beta \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$v \in T \iff v = \begin{pmatrix} 2\gamma + \delta \\ -\gamma + \delta \\ -\delta \end{pmatrix}$ con $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Dobbiamo capire quando $\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ -12\beta \\ 7\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma + \delta \\ -\gamma + \delta \\ -\delta \end{pmatrix}$

Aggiunta post-lezione:

dopo riduzione a gradini

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 2\gamma - \delta = 0 \\ -12\beta + \gamma - \delta = 0 \\ 7\beta + \delta = 0 \end{cases} \;\vdots\; \begin{cases} \alpha + 2\beta - 2\gamma - \delta = 0 \\ 12\beta - \gamma + \delta = 0 \\ 7\gamma + 5\delta = 0 \end{cases}$$

$\alpha = -\frac{1}{7}\delta$

$\beta = -\frac{1}{7}\delta$

$\gamma = -\frac{5}{7}\delta$

$$v \in S \cap T \iff v = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ -12\beta \\ 7\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\delta/7 \\ 12\delta/7 \\ -\delta \end{pmatrix}$$

$$S \cap T = \left\langle \begin{pmatrix} -3/7 \\ 12/7 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Metodo 2 : $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Vogliamo capire quando $v \in S \cap T$. Cominciamo con S.

$$v \in S \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -12 & b \\ 0 & 7 & c \end{array}\right) \text{ ha soluzione}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -12 & b \\ 0 & 7 & c \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ 7\,II \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -84 & 7b \\ 0 & 7 & c \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ 12\,III + II \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & -84 & 7b \\ 0 & 0 & 12c+7b \end{array}\right)$$

R-C : il sistema ha soluzione $\iff$ non c'è pivot nella colonna dei termini noti

$$\iff 12c + 7b = 0$$

$$\iff c = -\frac{7}{12} b$$

$v \in S \iff v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -\frac{7}{12} b \end{pmatrix}$. Ora procediamo con T.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -\frac{7}{12} b \end{pmatrix} \in T \iff \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -\frac{7}{12} b \end{array}\right) \text{ ha soluzione}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -\frac{7}{12} b \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} II \\ III \\ I \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -\frac{7}{12} b \\ 2 & 1 & a \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ III + 2I \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -\frac{7}{12} b \\ 0 & 3 & a+2b \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III + 3II \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -7/12\, b \\ 0 & 0 & a + 2b - \frac{7}{4} b \end{array}\right)$$

R-C : il sistema ha soluzione $\iff a + 2b - \frac{7}{4} b = 0$

$$\iff a = -2b + \frac{7}{4} b = -\frac{b}{4}$$

$$v \in S \cap T \iff v = \begin{pmatrix} -b/4 \\ b \\ -\frac{7}{12} b \end{pmatrix}$$

$$S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} -b/4 \\ b \\ -\frac{7}{12} b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ -7/12 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ -7/12 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle .$$