EALG - Tutorato 1

Titolo nota 10/03/2022

AMEDEO SGUEGLIA
a.sgueglia@lse.ac.uk

# RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI

$Ax = b$

$A$: matrice dei coefficienti

$b$: colonna dei termini noti

ESEMPIO
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Associamo al sistema $Ax=b$ la matrice $(A|b)$

Se la matrice $(A|b)$ è a gradini, allora è "facile" trovare le soluzioni.

ESEMPIO

pivot

variabili non-pivot

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \boxed{x_3} & \boxed{x_4} & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

$x_2 = -3 - 2x_4$

$x_1 = 1 + 4x_2 + x_4$

$= 1 + 4(-3 - 2x_4) + x_4 = 1 - 12 - 8x_4 + x_4 = -11 - 7x_4$

Le soluzioni sono
$$\begin{cases} x_1 = -11 - 7t \\ x_2 = -3 - 2t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

TEOREMA (Rouché-Capelli)

Il sistema ha soluzione se e solo se nella forma a gradini non c'è pivot nella colonna dei termini noti. Inoltre, il numero di parametri necessari per descrivere l'insieme delle soluzioni è uguale al numero di variabili non-pivot.

DOMANDA: Cosa fare se $(A|b)$ non è in forma a gradini?

Possiamo effettuare 3 operazioni su $(A|b)$ senza cambiare l'insieme delle soluzioni:
1. riordinare le righe
2. moltiplicare una riga per un numero reale $\neq 0$
3. sommare due righe.

**ES 1** Trovare l'insieme delle soluzioni di
$$\begin{cases} 2x - z = 1 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{III - II} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

vorremmo annullare l'entrata cerchiata

$$\xrightarrow[I \leftrightarrow II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II - 2I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III + II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right)$$

La matrice è in forma a gradini.

RC: Non c'è pivot nella colonna dei termini noti $\Rightarrow$ c'è soluzione.

Non ci sono variabili non-pivot
$\Rightarrow$ il numero di parametri necessari per descrivere l'insieme delle soluzioni è 0
$\Rightarrow$ la soluzione è unica.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2y + 3z = 7 \\ 5z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 11/10 \\ y = 17/10 \\ z = 6/5 \end{cases}$$

$z = 6/5$

$2y = 7 - 3z = 7 - 18/5 = 17/5 \rightarrow y = 17/10$

$x = 4 - y - z = 4 - 17/10 - 6/5 = \frac{40 - 17 - 12}{10} = 11/10$

**ES 2** Trovare al variare di $k \in \mathbb{R}$ le soluzioni di
$$\begin{cases} x + kz = -k \\ -x + y + z = k \\ x + ky + kz = 1 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ -1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k & k & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ II + I \\ III + I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & 1+k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 & k+1 \end{array}\right)$$

La matrice è in forma a gradini? Dipende dal valore di $k+1$.

$$k=-1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

non-pivot

R-C: Non c'è pivot nella colonna dei termini noti $\Rightarrow$ c'è soluzione. C'è una variabile non-pivot $\Rightarrow$ 1 parametro per descrivere le soluzioni.

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x = 1+z \\ y = 0 \end{array}$$

Le soluzioni sono $(1+t, 0, t) \quad t \in \mathbb{R}$

$$k \neq -1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 & k+1 \end{array}\right) \xrightarrow{III/k+1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

⚠ possibile perché $k+1 \neq 0$

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 1 \end{array}\right)$$

$k=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

c'è pivot nella colonna dei termini noti $\Rightarrow$ non esiste soluzione

$k \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -k \\ 0 & 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 1 \end{array}\right)$$

R-C $\Rightarrow$ la soluzione esiste ed è unica.

(trovatela!)

$k=0$ no sol.

$k=-1$ $(1+t, 0, t)$ $t \in \mathbb{R}$

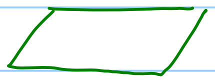
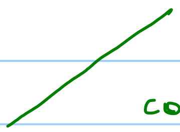
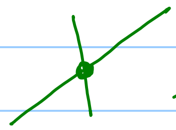
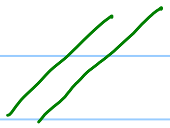
$k \neq 0, -1$ unica soluzione.

**ESERCIZIO/DISCUSSIONE** Descrivere quali insiemi possono essere l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare in 2 equazioni e 2 incognite.

$$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases} \qquad a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$$

$x, y$ incognite

Dal punto di vista geometrico, ci stiamo chiedendo come possono intersecarsi due rette in $\mathbb{R}^2$.

| GEOMETRIA | INSIEME DELLE SOLUZIONI | FORMA MATRICE A GRADINO |
|---|---|---|
|  | infinite soluzioni descritte da 2 parametri (tutto il piano $\mathbb{R}^2$) | $\left(\begin{array}{cc\|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ |
|  rette coincidenti | infinite soluzioni descritte da 1 parametro (retta) | $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & & \\ & 0 & 0 \end{array}\right)$ |
|  rette incidenti | un'unica soluzione (punto) | $\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & & \\ & 1 & \end{array}\right)$ |
|  rette parallele | nessuna soluzione ($\emptyset$) | $\left(\begin{array}{cc\|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ |