Esercizio: Nello spazio euclideo usuale si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni cartesiane

$$r_1: \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \\ x - y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x + 2y + z + 6 = 0 \\ x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare una forma parametrica delle rette r_1 e r_2.

(b) Determinare la posizione reciproca di r_1 e r_2. Calcolare la distanza tra r_1 e r_2.

(c) Determinare un piano π parallelo a r_1 e r_2 ed equidistante da r_1 e r_2.

(d) Determinare dei punti $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ che abbiano la stessa proiezione ortogonale sul piano π.

Svolgimento:

Risolviamo il sistema che definisce r_1:

$$\begin{matrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{matrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3 \\ \quad y + z = 3 \end{cases}$$ la variabile libera è z

per $z = 0$ otteniamo la soluzione particolare $(0,3,0)$.
per $z = 1$ la soluzione dell'omogenea associata che si ottiene è $(1,-1,1)$, dunque $r_1 = (0,3,0) + \langle (1,-1,1) \rangle$.

Risolviamo il sistema che definisce r_2:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{matrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{matrix}$$

il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+2y+z=-6 \\ -y+z=3 \end{cases}$$ la variabile libera è z.

Per $z=0$ si ottiene la soluzione particolare $(0,-3,0)$, per $z=1$ la soluzione dell'omogenea associata che si ottiene è $(-3,1,1)$, dunque $r_2 = (0,-3,0) + \langle(-3,1,1)\rangle$.

(b) Poiché $(1,-1,1)$ e $(-3,1,1)$ sono lin. ind. è possibile calcolare la distanza con la formula

$$\operatorname{dist}(r_1,r_2) = \frac{|((0,3,0)-(0,-3,0)) \cdot ((1,-1,1)\times(-3,1,1))|}{\|(1,-1,1)\times(-3,1,1)\|}$$

Dunque

$$\operatorname{dist}(r_1,r_2) = \frac{|(0,6,0)\cdot(-2,-4,-2)|}{\|(-2,-4,-2)\|} =$$

$$= \frac{|(0,6,0)\cdot(1,2,1)|}{\|(1,2,1)\|} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

La distanza non è nulla, dunque le rette sono sghembe.

(c) Il piano π avrà giacitura $\langle (1,-1,1), (-3,1,1) \rangle$.

Usando il prodotto vettoriale $(1,-1,1) \times (-3,1,1) = (-2,-4,-2)$,

si ha che la giacitura di π ha equazione $x+2y+z=0$

Dunque π ha equazione $\pi: x+2y+z+d=0$

Poiché π è parallelo a r_1 e r_2 si ha

$$\mathrm{dist}(r_1, \pi) = \mathrm{dist}((0,3,0), \pi)$$

e

$$\mathrm{dist}(r_2, \pi) = \mathrm{dist}((0,-3,0), \pi)$$

Usando la formula per la distanza di un punto da un piano si ottiene

$$\mathrm{dist}(r_1, \pi) = \frac{|6+d|}{\sqrt{6}}$$

e $$\mathrm{dist}(r_2, \pi) = \frac{|-6+d|}{\sqrt{6}}$$

Imponendo $\mathrm{dist}(r_1, \pi) = \mathrm{dist}(r_2, \pi)$ si ottiene

$$\frac{|6+d|}{\sqrt{6}} = \frac{|-6+d|}{\sqrt{6}}$$

da cui $|d+6| = |d-6|$, elevando ambo i membri al quadrato si ottiene $(d-6)^2 = (d+6)^2$, cioè $d=0$.

Dunque il piano cercato è $\pi: x+2y+z=0$

- Altro Metodo: asse del segmento a minima distanza tra r_1 e r_2

(d) La proiezione ortogonale di un punto P sul piano π si ottiene intersecando la retta ortogonale a π per P con il piano π.

Se due punti hanno stessa proiezione ortogonale su π vuol dire che giacciono sulla stessa retta ortogonale di π.

Poiché r_1 e r_2 sono sghembe, esistono solo due punti $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$ con queste proprietà, sono i punti di minima distanza.

Determiniamo tali punti.

Determiniamo la retta t di minima distanza.

$\pi_1 = (0,3,0) + \langle (1,-1,1), (1,2,1) \rangle$

Poiché $(1,-1,1) \times (1,2,1) = (-3,0,3)$ si ha che π_1

ha equazione $x - z + d = 0$, $d=0$ poiché $(0,3,0) \in \pi_1$.

Dunque $\pi_1 : x - z = 0$

$\pi_2 = (0,-3,0) + \langle (-3,1,1), (1,2,1) \rangle$

Poiché $(-3,1,1) \times (1,2,1) = (-1,4,-7)$, π_2 ha equazione

$\pi_2 : x - 4y + 7z + d = 0$ e poiché $(0,-3,0) \in \pi_2$ si ha

$d = -12$, cioè $\pi_2 : x - 4y + 7z - 12 = 0$.

Segue che t ha equazioni

$$t : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

Intersechiamo t con r_1:

$$r_1 : \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = \alpha \end{array} \quad , \quad t : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

mettendo a sistema si ottiene

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \alpha - 12 + 4\alpha + 7\alpha - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \alpha = 2$$

cioè $r_1 \cap t = (2,1,2)$

Intersechiamo t con r_2:

$$r_2 : \begin{array}{l} x = -3\alpha \\ y = -3 + \alpha \\ z = \alpha \end{array} \quad , \quad t : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - 4y + 7z - 12 = 0 \end{cases}$$

mettendo a sistema si ottiene

$$\begin{cases} -3\alpha - \alpha = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \alpha = 0$$

cioè $r_2 \cap t = (0,-3,0)$

I punti $P_1 = (2,1,2)$ e $P_2 = (0,-3,0)$ sono i punti di minima distanza di r_1 da r_2 ed hanno stessa proiezione ortogonale su π.

$$\left[\, \text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, P_2) = \| P_1 - P_2 \| = \| (2,4,2) \| = 2\sqrt{6}\,. \right.$$