Prima di studiare la distanza tra due rette sghembe nello spazio euclideo usuale introduciamo il prodotto vettoriale.

Il prodotto vettoriale è un'operazione che ad una coppia ordinata di vettori di $\mathbb{R}^3$ associa un vettore di $\mathbb{R}^3$.

Def: Siano $v = (m, n, p)$ e $w = (m', n', p')$ due vettori di $\mathbb{R}^3$. Si definisce il prodotto vettoriale di v e w nel seguente modo:

$$v \times w = \left(\det \begin{pmatrix} n & p \\ n' & p' \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} m & p \\ m' & p' \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} m & n \\ m' & n' \end{pmatrix} \right).$$

Il prodotto vettoriale ha le seguenti proprietà:

(i) $v \times w$ è ortogonale sia a v che a w

(ii) $\| v \times w \|$ è l'area del parallelogramma di lati v e w

(iii) $v \times w = 0$ se e solo se v e w sono lin. dip.

(iv) $v \times w = - w \times v$

(v) $v \times (w + z) = (v \times w) + (v \times z)$, $v \times (\alpha w) = \alpha (v \times w)$.

(ossia il prodotto vettoriale è bilineare)

Applicheremo il prodotto vettoriale ai seguenti problemi:

(a) Data una base di un sottospazio di dim 2 di $\mathbb{R}^3$, trovare un'equazione che lo definisca.

(a') Determinare l'ortogonale di un sottospazio di dim 2 di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare l'equazione di un piano nello spazio affine.

(c) Determinare la distanza tra due rette sghembe nello spazio euclideo usuale.

Esercizio a: Sia $W = \langle (2,1,1), (3,-1,2) \rangle$, determinarne un'equazione cartesiana.

Svolgimento:

Calcoliamo $(2,1,1) \times (3,-1,2)$:

$$(2,1,1) \times (3,-1,2) = \left(\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (3, -1, -5)$$

W ha equazione $3x - y - 5z = 0$.

Esercizio a': Sia $U = \langle (1,2,-3), (3,-5,1) \rangle$, determinare $U^\perp$.

Svolgimento: Calcoliamo il prodotto vettoriale $(1,2,-3) \times (3,-5,1)$:

$$(1,2,-3) \times (3,-5,1) = \left(\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (-13, -10, -11)$$

Si ha $U^\perp = \langle (-13,-10,-11) \rangle = \langle (13,10,11) \rangle$.

Esercizio b: Sia $\pi = (1,1,0) + \langle (1,2,1), (1,-1,2) \rangle$, determinare un'equazione di π.

Svolgimento: Calcoliamo il prodotto vettoriale $(1,2,1) \times (1,-1,2)$:

$$(1,2,1) \times (1,-1,2) = \left(\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (5, -1, -3)$$

Il piano π avrà equazione $5x - y - 3z + d = 0$, imponiamo che π passi per $(1,1,0)$ per determinare d:

$$(1,1,0) \in \pi \iff 5 \cdot 1 - 1 - 3 \cdot 0 + d = 0 \iff d = -4$$

Dunque $\pi : 5x - y - 3z - 4 = 0$.

<u>Esercizio c</u>: Date le rette $r = (1,1,0) + \langle (1,2,-1) \rangle$ e $s = (2,3,-1) + \langle (3,0,1) \rangle$, calcolare la distanza tra r e s.

<u>Svolgimento</u>:

Poiché $(1,2,-1)$ e $(3,0,1)$ sono lin. ind., le rette r e s non sono parallele.

Dalla discussione generale della distanza tra sottovarietà lineari abbiamo visto che la distanza tra r e s è la norma della proiezione ortogonale di $(1,1,0) - (2,3,-1)$ su $\langle (1,2,-1), (3,0,1) \rangle^{\perp}$.

Per calcolare tale proiezione ortogonale è necessario determinare un versore di $\langle (1,2,-1), (3,0,1) \rangle^{\perp}$.

Usando il prodotto vettoriale si ha che tale versore è

$$\frac{(1,2,-1) \times (3,0,1)}{\|(1,2,-1) \times (3,0,1)\|} = \frac{(2,-4,-6)}{\|(2,-4,-6)\|} = \frac{(1,-2,-3)}{\sqrt{14}}$$

La proiezione ortogonale di $(1,1,0) - (2,3,-1) = (-1,-2,1)$ su $\langle (1,2,-1), (3,0,1) \rangle^{\perp}$ è quindi

$$\left((-1,-2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} (1,-2,-3) \right) \frac{1}{\sqrt{14}} (1,-2,-3)$$

la norma di tale vettore è $\left| (-1,-2,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} (1,-2,-3) \right| = 0$

La distanza tra r e s è nulla, le rette sono quindi incidenti.

Esercizio c bis: Date le rette $r = (-1,3,0) + \langle (1,2,-1) \rangle$ e $s = (0,0,1) + \langle (3,0,2) \rangle$ determinarne la distanza.

Svolgimento: $(1,2,-1)$ e $(3,0,2)$ sono lin. ind. dunque r e s non sono parallele.

Troviamo un versore di $\langle (1,2,-1), (3,0,2) \rangle^{\perp}$ usando il prodotto vettoriale. Tale versore sarà

$$\frac{(1,2,-1) \times (3,0,2)}{\| (1,2,-1) \times (3,0,2) \|} = \frac{(4,-5,-6)}{\| (4,-5,-6) \|} = \frac{1}{\sqrt{77}} (4,-5,-6)$$

La proiezione ortogonale di $(0,0,1) - (-1,3,0) = (1,-3,1)$ su $\langle (1,2,-1), (3,0,2) \rangle^{\perp}$ è

$$\left((1,-3,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{77}} (4,-5,-6) \right) \frac{1}{\sqrt{77}} (4,-5,-6)$$

La sua norma è

$$\left| (1,-3,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{77}} (4,-5,-6) \right| = \frac{13}{\sqrt{77}}$$

Dunque la distanza tra r e s è

$$\mathrm{dist}(r,s) = \frac{13}{\sqrt{77}}$$

Le rette sono sghembe.

Oss: Siano $r = P + \langle v \rangle$ e $s = Q + \langle w \rangle$ due rette non parallele dello spazio euclideo usuale (ossia v e w sono lin. ind.). Dall'esercizio c ricaviamo la seguente formula generale per la distanza tra r e s:

$$\mathrm{dist}(r,s) = \frac{|(P-Q)\cdot(v \times w)|}{\|v \times w\|}$$

Un altro metodo per calcolare la distanza tra due rette sghembe è quello di calcolare i punti di minima distanza.

Siano $r = P + \langle v \rangle$ e $s = Q + \langle w \rangle$ due rette sghembe dello spazio euclideo usuale.

La retta $t = \pi_1 \cap \pi_2$, dove $\pi_1 = P + \langle v, v \times w \rangle$ e $\pi_2 = Q + \langle w, v \times w \rangle$, è detta retta di minima distanza tra r e s. I punti $P_1 = r \cap t$ e $P_2 = s \cap t$ sono i punti che realizzano la minima distanza tra r e s:

$$\mathrm{dist}(r,s) = \mathrm{dist}(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\|.$$

Un ulteriore metodo di calcolo di $\mathrm{dist}(r,s)$ è quello di calcolare il piano $\pi = Q + \langle v, w \rangle$ contenente s e parallelo a r, si ha

$$\mathrm{dist}(r,s) = \mathrm{dist}(r, \pi) = \mathrm{dist}(P, \pi).$$