Passiamo ora a considerazioni di tipo metrico nello spazio e nel piano.

Def: Chiameremo spazio euclideo usuale lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dove su $V = \mathbb{R}^3$ considereremo pure il prodotto scalare usuale. Chiameremo piano euclideo usuale il piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dove su $V = \mathbb{R}^2$ considereremo il prodotto scalare usuale.

Il prodotto scalare su V ci permette di definire la distanza tra punti dello spazio euclideo usuale o del piano euclideo usuale.

Def: Siano P, Q due punti dello spazio euclideo usuale, la distanza tra P e Q si definisce come segue:

$$dist(P,Q) = \| P - Q \|$$

Oss: Una definizione analoga vale per punti del piano euclideo usuale.

Esempio: Siano $P = (3,-1,2)$ e $Q = (2,0,1)$ due punti dello spazio euclideo usuale, allora si ha

$$dist(P,Q) = \| (3,-1,2) - (2,0,1) \| = \| (1,-1,1) \| =$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3}$$

Il prodotto scalare usuale di $\mathbb{R}^n$ permette di definire, oltre alla norma di un vettore, anche la nozione di ortogonalità di due vettori e l'ortogonale di un sottospazio.

Analogamente esso permette di definire la nozione di ortogonalità tra sottovarietà del piano e dello spazio euclideo usuale.

Def: (i) Due rette r_1 e r_2 sono ortogonali se i rispettivi vettori direttori v_1 e v_2 sono ortogonali $(v_1 \cdot v_2 = 0)$.

(ii) Una retta r è ortogonale ad un piano π se il vettore v di r è ortogonale alla giacitura V di π $(v \in V^\perp)$.

(iii) due piani π_1 e π_2, di giaciture V_1 e V_2 rispettivamente, sono ortogonali se $V_1^\perp$ è ortogonale a $V_2^\perp$.

Esempi:

(i) Le rette $r_1 = (1,1,2) + \langle (3,-2,1) \rangle$ e $r_2 = (5,5,-3) + \langle (1,1,-1) \rangle$ sono ortogonali (infatti $(3,-2,1) \cdot (1,1,-1) = 0$).

(ii) La retta $r = (1,1,2) + \langle (3,-2,1) \rangle$ è ortogonale al piano

[redacted] $\pi : 3x - 2y + z - 6 = 0$

(iii) I piani $\pi_1 : 5x - 3y - z + 10 = 0$ e $\pi_2 : -x - 2y + z - 3 = 0$ sono ortogonali.

Abbiamo visto che nello spazio euclideo usuale è possibile definire la distanza tra due punti, ora vediamo come si estende la definizione di distanza a sottovarietà lineari dello spazio euclideo usuale e come calcolare tale distanza.

Def: Siano L_1 e L_2 due sottovarietà lineari dello spazio euclideo usuale, la distanza tra L_1 e L_2 è definita come segue

$$\mathrm{dist}(L_1, L_2) = \min_{\substack{P \in L_1 \\ Q \in L_2}} \| P - Q \|$$

Ossia è definita come la minima distanza tra un punto di L_1 e un punto di L_2.

Oss: Si ha $\mathrm{dist}(L_1, L_2) = 0$ se e solo se L_1 e L_2 si intersecano (infatti $\| P - Q \| = 0 \iff P = Q$).

Vediamo come calcolare tale distanza nei vari casi.

Prop: Siano $L_1 = P + W_1$ e $L_2 = Q + W_2$ due sottovarietà lineari con $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazi direttori.
Allora esistono $P_0 \in L_1$ e $Q_0 \in L_2$ (in generale non unici) tali che $v = Q_0 - P_0 \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$. Per tali P_0, Q_0 si ha $\mathrm{dist}(L_1, L_2) = \| Q_0 - P_0 \| = \mathrm{dist}(P_0, Q_0)$

Distanza punto – retta nel piano.

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto del piano euclideo usuale,
sia $r : ax + by + c = 0$ una retta del piano euclideo usuale.

Sia Q un punto di r, è possibile decomporre il vettore $P_0 - Q$ nella somma $P_0 - Q = (P_0 - Q)_{/\!/} + (P_0 - Q)_{\perp}$,
dove $(P_0 - Q)_{/\!/} \in \langle (b, -a) \rangle$ è parallelo ad r e
$(P_0 - Q)_{\perp} \in \langle (a, b) \rangle$ è ortogonale ad r.

Se Q' è un altro punto di r, si ha $P_0 - Q' = (P_0 - Q) + (Q - Q')$
Osservando che $Q - Q' \in \langle (b, -a) \rangle$, ossia è parallelo ad r, si conclude che $(P - Q)_{\perp} = (P - Q')_{\perp}$.

Cioè tutti i vettori congiungenti un punto di r con P_0 hanno tutti stessa componente ortogonale a r.

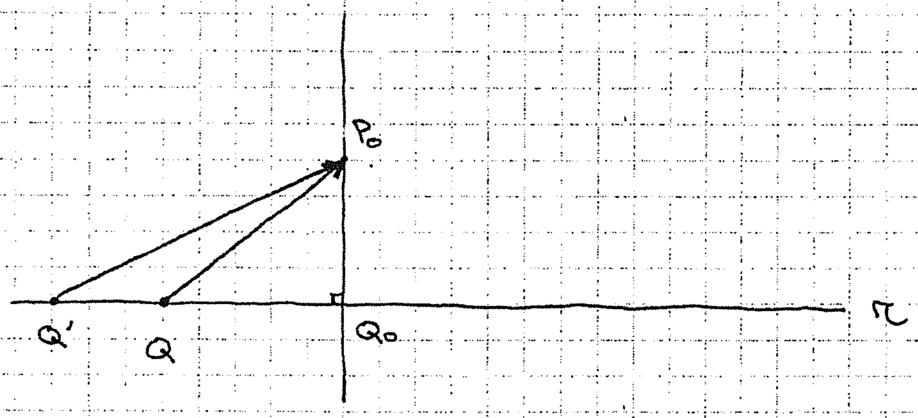
Dunque la minima distanza si ottiene quando $P_0 - Q$ è ortogonale a r. Per un punto qualsiasi Q di r, la componente di $P_0 - Q$ ortogonale a r sarà

$$(P_0 - Q)_{\perp} = \left((P_0 - Q) \cdot \frac{(a, b)}{\|(a, b)\|} \right) \frac{(a, b)}{\|(a, b)\|}$$

Dunque $\displaystyle \|(P_0 - Q)_{\perp}\| = \frac{|(P_0 - Q) \cdot (a, b)|}{\|(a, b)\|}$

Poiché $Q = (x_1, y_1) \in r$, si ha $(x_0 - x_1, y_0 - y_1) \cdot (a, b) =$
$= ax_0 + by_0 - ax_1 - by_1 = ax_0 + by_0 + c$

distanza di un punto da una retta nel piano



$$(P_0 - Q)_\perp = (P_0 - Q')_\perp = P_0 - Q_0$$

$$\mathrm{dist}\,(P_0, r) = \mathrm{dist}\,(P_0, Q_0) = \| P_0 - Q_0 \|$$

Dunque si conclude che

$$\mathrm{dist}\,(P_0, r) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Esempio: Se $P = (2,-4)$ e $r: x + 2y - 1 = 0$ si ha

$$\mathrm{dist}\,(P, r) = \frac{|2 + 2(-4) - 1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

Oss: La distanza tra sottovarietà lineari è sempre un numero non negativo.

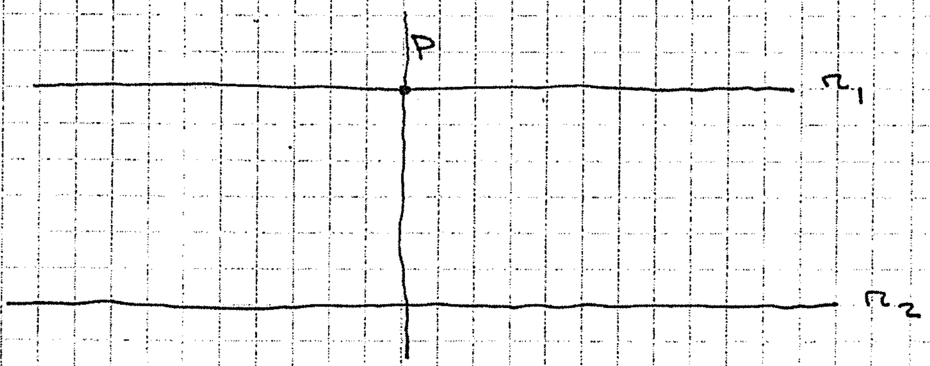
Distanza tra due rette parallele del piano.

Per calcolare la distanza tra due rette parallele r_1 e r_2, si prende un punto $P \in r_1$ e si ha

$$\mathrm{dist}\,(r_1, r_2) = \mathrm{dist}\,(P, r_2)$$

Oss: Questa uguaglianza è vera solo per rette parallele, per rette incidenti la distanza è nulla.

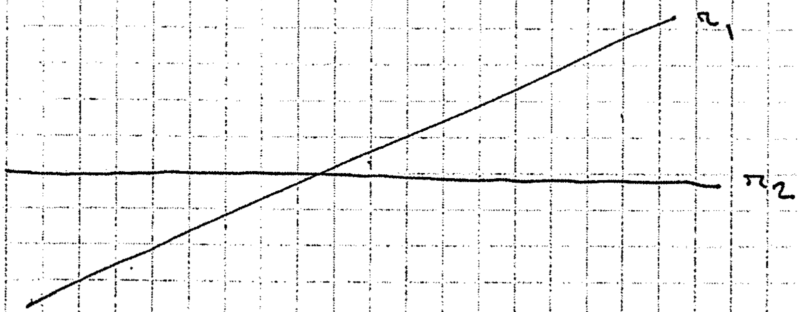
distanza tra due rette parallele del piano



$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(P, r_2)$$

---

distanza tra due rette incidenti



$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) = 0$$

Passiamo allo spazio euclideo usuale.

Distanza punto-piano.

Sia $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto dello spazio e

$\pi: ax + by + cz + d = 0$ un piano dello spazio, analogamente al caso del piano già trattato, se $Q \in \pi$ si può decomporre

$P - Q = (P-Q)_{/\!/} + (P-Q)_{\perp}$ in somma di un vettore parallelo a π e di un vettore ortogonale a π.

Se $Q' \in \pi$ è un altro punto del piano π si ha

$P - Q' = (P-Q) + (Q-Q')$ con $Q - Q'$ parallelo a π,

dunque $(P-Q)_{\perp} = (P-Q')_{\perp}$ è il vettore di minima lunghezza congiungente P con un punto di π.

Inoltre si ha $(P-Q)_{\perp} = \left((P-Q) \cdot \frac{(a,b,c)}{\|(a,b,c)\|} \right) \frac{(a,b,c)}{\|(a,b,c)\|}$

Dunque $\operatorname{dist}(P, \pi) = \dfrac{|(P-Q) \cdot (a,b,c)|}{\|(a,b,c)\|}$

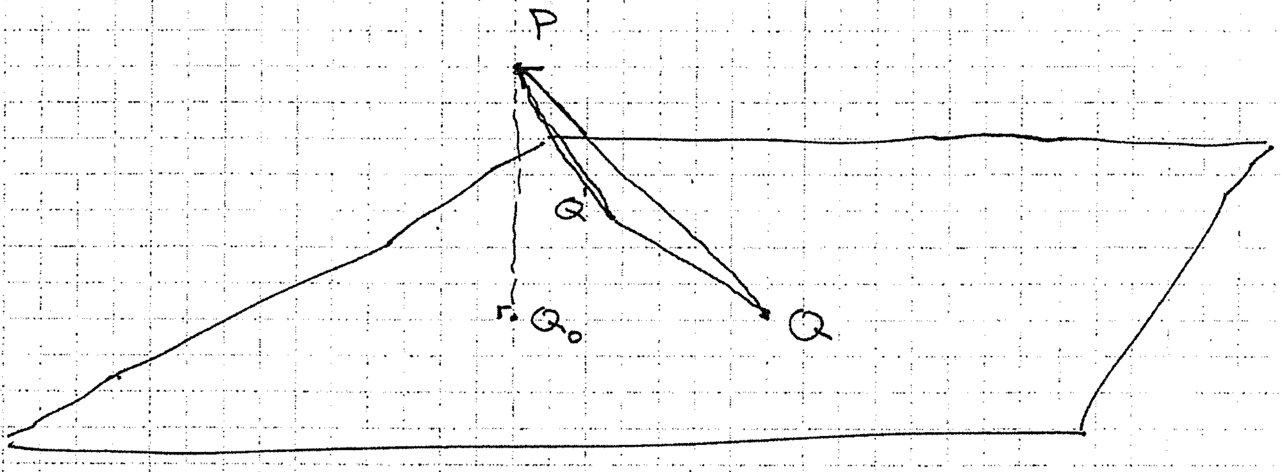
Se $Q = (x_1, y_1, z_1)$ si ha

$(P-Q) \cdot (a,b,c) = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (a,b,c) =$

$= a x_0 + b y_0 + c z_0 - a x_1 - b y_1 - c y_1 =$

$= a x_0 + b y_0 + c z_0 + d$

distanza di un punto da un piano nello spazio



$$(P-Q)_\perp = (P-Q')_\perp = P - Q_0$$

$$\text{dist}(P,\pi) = \text{dist}(P,Q_0) = \| P - Q_0 \|$$

Si conclude che si ha

$$\operatorname{dist}(P,\pi) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

<u>Esempio</u>: Se $P=(1,2,-2)$ e $\pi: -x+3y+2z-5=0$ si ha

$$\operatorname{dist}(P,\pi) = \frac{|-1+3(2)+2(-2)-5|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}}$$

$$= \frac{|-4|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$

<u>Distanza tra una retta e un piano paralleli.</u>

Se r e π sono una retta e un piano paralleli, se P è un qualsiasi punto di r, si ha

$$\operatorname{dist}(r,\pi) = \operatorname{dist}(P,\pi).$$

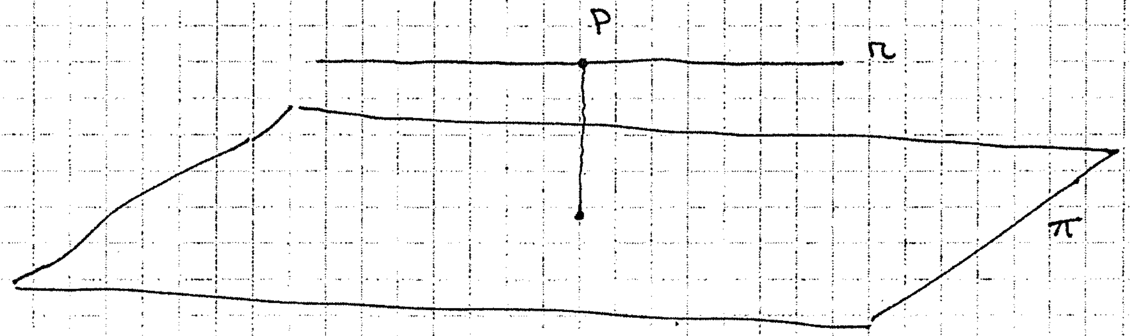
<u>Distanza tra due piani paralleli.</u>

Se π_1 e π_2 sono due piani paralleli, se $P \in \pi_1$, si ha

$$\operatorname{dist}(\pi_1,\pi_2) = \operatorname{dist}(P,\pi_2).$$

<u>Oss</u>: Nel caso di rette o piani incidenti la distanza è nulla.

distanza tra una retta e un piano paralleli



$$\text{dist}(r, \pi) = \text{dist}(P, \pi)$$

---

distanza tra due piani paralleli

$$\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(P, \pi_2)$$