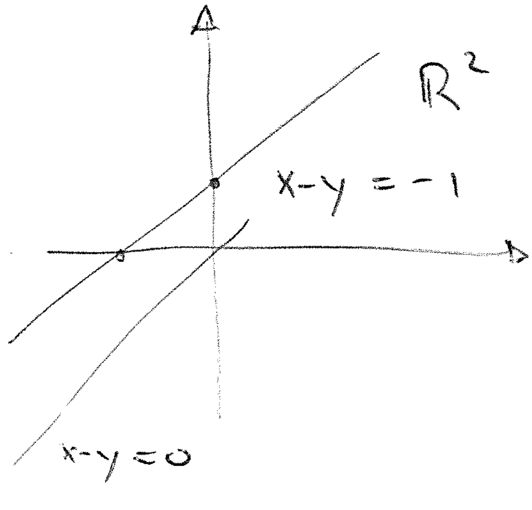
Spazi Affini

- Definizioni
- Sottospazi Affini = Sottovarietà Lineari
- Descrizione di sottospazi e posizione reciproca :
  sottospazi paralleli , incidenti , sghembi

Proprietà Metriche :

- spazi affini metrici
- ortogonalità
- distanze

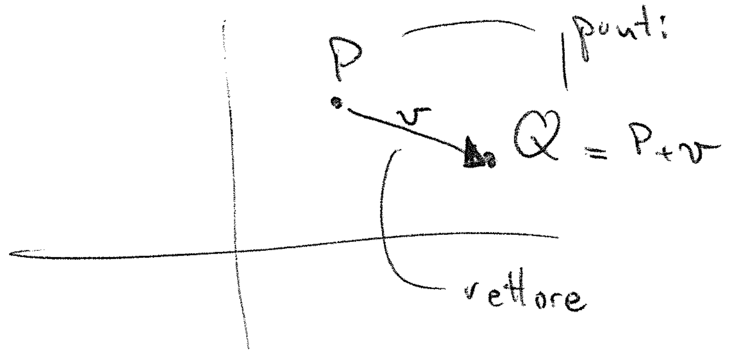
Esempio illustrativo



Def: lo spazio affine $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ n-dimensionale è l'insieme i cui <u>punti</u> sono le n-uple $(x_1, \dots, x_n)$ con $x_i \in \mathbb{R}$, su cui agisce lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \\ (P, v) & \longmapsto & P+v \\ \| & & \| \\ ((x_1, \dots, x_n), (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) & \longmapsto & (x_1+\lambda_1, \dots, x_n+\lambda_n) \end{array}$$

<u>Idea</u>



<u>Proprietà</u>: $\forall P, Q \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R})\ \exists!\, v \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Q = P+v$

Infatti se $P = (x_1, \dots, x_n)$ e $Q = (y_1, \dots, y_n)$ prendiamo il vettore $v = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$

Questo unico vettore ~~[illegible]~~ si denota $v = Q - P \in \mathbb{R}^n$

abbiamo quindi un'applicazione
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (P, Q) & \longmapsto & Q-P \end{array}$$

<u>Attenzione!!!</u> <u>non</u> ha senso definire <u>la somma</u> $P+Q$ tra punti di uno spazio affine

Def: Una <u>sottovarietà lineare</u> in $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ è un insieme $L = P + W = \{P + w \mid w \in W\}$ con $W \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale, W è chiamato giacitura, o spazio direttore, di L.

La dimensione di L è $\dim W$.

- Una retta è una sottovar. lineare di dimensione 1.
- Un piano è una sottovarietà lineare di dimensione 2.

<u>Proprietà</u>: i) l'insieme W sottospazio direttore di L è $W = \{v = Q - P \in \mathbb{R}^n \mid P, Q \in L\}$, e se $P_0 \in L$ è un punto qualsiasi allora $L = P_0 + W$

ii) L'insieme S delle soluzioni di un sistema lineare (non omogeneo) $Ax = b$ in <u>n variabili</u> è una sottovar. lineare

iii) Ogni sottovarietà lineare è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Es) In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, il piano affine abbiamo:

sottovar. lineari di dim. 0: i punti $L = \{P\}$ con $P = (x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

dim 1: le rette $L = P + \langle v \rangle$ con $P = (x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\neq 0$

$A x_1 + B x_2 = C$ con $(A, B) \neq (0,0)$ sono equazioni di una retta in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$

Come per i sottospazi vettoriali, abbiamo 2 descrizioni:

i) descrizione parametrica: $L = P + W = P + \langle w_1, \dots, w_r \rangle$

si dà un punto $P \in L$ e un sistema di generatori di W

ii) descrizione cartesiana: $L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \ / \ Ax = b\}$

si dà un sistema di equazioni lineari.

Bisogna saper passare da una descrizione ad un'altra:

(ii) $\rightsquigarrow$ (i) risolvere il sistema: $L = \underbrace{P_0}_{\text{soluzione particolare}} + \underbrace{\ker(A)}_{\text{sottosp. vettoriale (sol. del sist. omog.)}}$

(i) $\rightsquigarrow$ (ii) trovare il sistema omogeneo per W:

$W = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \ / \ A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0\}$, poi imporre

che $Ax = b$ abbia P come soluzione per trovare $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Esempio per le rette in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

$L: x - y = -1$ $\qquad L = (-1, 0) + \langle (1,1) \rangle = (0,1) + \langle (-2,-2) \rangle$

$L = (2,2) + \langle (1,2) \rangle$: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t = x - 2 \\ y = 2 + 2x - 4 \end{cases}$

$\rightsquigarrow L: 2x - y = 2$. Oppure: Sist. lin. omog. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$

$\rightsquigarrow 2x - y = b$ verificato (2,2) $\Rightarrow b$:

Posizione Reciproca:

- Consideriamo 2 rette in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, allora saranno parallele o incidenti:

$$L_1 : Ax + By = C$$
$$L_2 : Dx + Ey = F$$

di dimensione 1

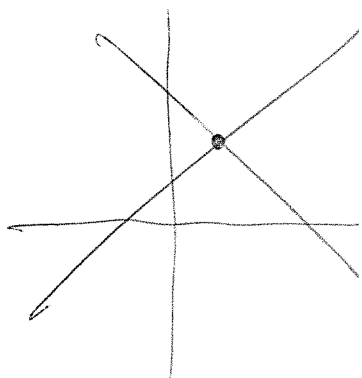
2 possibilità

(i) $rg\begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} = 2$

(ii) $rg\begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} = 1$

Caso (i) consideriamo il sistema $L_1 \cap L_2$: $\begin{cases} Ax+By = C \\ Dx + Ey = F \end{cases}$

questo ha un'unica soluzione $\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2 = \{P\}$

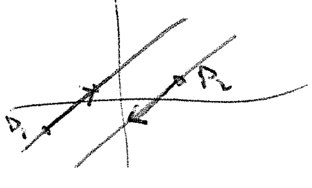


Caso (ii) sia $L_1 = P_1 + W_1$ e $L_2 = P_2 + W_2$

allora $W_1 = \langle(-B, A)\rangle$ e $W_2 = \langle(-E, D)\rangle$

e poiché $\det\begin{pmatrix} -B & -E \\ A & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} = 0$ $W_1 = W_2$

quindi $L_1 \parallel L_2$



Attenzione: potrebbero essere coincidenti!!

Definizione: i) due sottovarietà lineari $L_1 = P + V_1$ e $L_2 = P + V_2$ di ~~una~~ $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ si dicono parallele (e si scrive $L_1 \parallel L_2$) se uno dei due spazi direttori è contenuto nell'altro (cioè $V_1 \leq V_2$ oppure $V_2 \leq V_1$)

ii) due sottovar. lineari $L_1 = P + V_1$ e $L_2 = Q + V_2$ di $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ si dicono sghembe se non hanno punti in comune e gli spazi direttori sono in somma diretta:

cioè se $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ e $V_1 \cap V_2 = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$

es. $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, $L_1 = (0,0,0) + \langle(1,0,0)\rangle = P_1 + V_1$

$L_2 = (0,0,1) + \langle(2,0,0)\rangle = P_2 + V_2$

$L_3 = (0,0,1) + \langle(0,0,1)\rangle = P_3 + V_3$

$L_4 = (0,0,1) + \langle(0,1,0)\rangle = P_4 + V_4$

allora $L_1 \parallel L_2$ infatti $V_1 = V_2$

$L_1 \not\parallel L_3$ infatti $V_1 \not\leq V_3$ e $V_2 \not\leq V_3$

L_1 e L_3 non sono sghembe infatti $P_1 = (0,0,1) + (-1)(0,0,1) \in L_1 \cap L_3$

L_1 e L_4 sono sghembe infatti $L_1 \cap L_4 = \emptyset$ e $V_1 \cap V_4 = \{0\}$

Tabella riassuntiva

	$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$	$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$
rette coincidenti	(1)	1
rette parallele distinte	1	2
rette incidenti	2	(2)

Posizione reciproca di 2 rette in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

$L_1: \; a_1X + b_1Y = c_1 \quad$ con $(a_1, b_1) \neq (0,0)$

$L_2: \; a_2X + b_2Y = c_2 \quad$ con $(a_2, b_2) \neq (0,0)$

Tabella riassuntiva

	$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$	$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$
piani coincidenti	(1)	1
piani paralleli distinti	1	2
piani incidenti (intersecantisi in una retta)	2	(2)

Posizione reciproca di 2 piani in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$\pi_1 : a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = d_1$ con $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$

$\pi_2 : a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = d_2$ — $(a_2, b_2, c_2) \neq (0,0,0)$

Posizione reciproca di un piano ed una retta

$\pi: \; a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \quad$ con $(a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$

$l: \begin{cases} a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \end{cases} \quad$ con $rk \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2$

- retta contenuta nel piano $\quad (l \cap \pi = l)$

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 2$$

la prima riga è combinazione lineare delle altre due, dunque il sistema che definisce $l \cap \pi$ è equivalente al sistema che definisce l.

- retta e piano paralleli, retta esterna al piano

$$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2 \quad e \quad rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 3$$

il sistema è incompatibile, dunque $\pi \cap l = \emptyset$ e lo spazio direttore di l è contenuto nello spazio direttore di π, ossia π e l sono paralleli.

- retta e piano incidenti

$rk \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 3$, dunque il sistema è risolubile ed ammette un'unica sol.

$\pi \cap l = P$.

Tabella riassuntiva

	$\text{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$	$\text{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$
retta contenuta nel piano	(2)	2
retta e piano paralleli retta esterna al piano	2	3
retta e piano incidenti in un punto	3	(3)

piano $\pi: \; a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \qquad (a_1, b_1, c_1) \neq (0,0,0)$

retta $\ell: \; \begin{cases} a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \end{cases} \qquad rg\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2$

Posizione reciproca di due rette nello spazio

$$\ell_1 : \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \end{cases} \quad \text{con } \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{e}$$

$$\ell_2 : \begin{cases} a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = d_3 \\ a_4 x_1 + b_4 x_2 + c_4 x_3 = d_4 \end{cases} \quad \text{con } \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} = 2 .$$

- rette coincidenti ($\ell_1 = \ell_2$)

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 2$$

il sistema è risolubile ed equivalente a quello che definisce ℓ_1 (oppure a quello che definisce ℓ_2)

- rette parallele distinte

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{e} \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 3$$

le rette hanno stesso spazio direttore, ma $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$

- rette incidenti

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 3$$

il sistema è compatibile di rango massimo, dunque

$\ell_1 \cap \ell_2 = P$.

- rette sghembe, ossia non parallele e non incidenti

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{e} \quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} = 4$$

il sistema è incompatibile, quindi $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ e i sottospazi direttori di l_1 e l_2 sono distinti.

Tabella riassuntiva

	$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$	$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$
rette coincidenti	(2)	2
rette parallele distinte	2	3
rette incidenti in un punto	3	3
rette sghembe	3	4