Esercizio: Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale si considerino i due sottospazi vettoriali

$$T = \langle (1,0,1), (3,-1,0) \rangle \quad e \quad U = \langle (2,-1,0), (2,-1,-1) \rangle .$$

(a) Determinare una base ortonormale di $S = U \cap T$.

(b) Determinare una base ortonormale di $S^{\perp}$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $(3,-3,-3)$ su $S^{\perp}$.

(d) Determinare un vettore di T la cui proiezione ortogonale su U sia $(4,-2,5)$.

(e) Scrivere le matrici di $\pi_{S^{\perp},S}$ e $\sigma_{S^{\perp},S}$ nella base canonica.

Svolgimento:

(a) Determiniamo $S = T \cap U$.

$U: \; x + 2y = 0$

Sia $\alpha(1,0,1) + \beta(3,-1,0)$ il generico vettore di T, imponiamo che appartenga a U; si ottiene l'equazione

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{cioè} \quad \alpha = -\beta .$$

Dunque $S = \langle (2,-1,-1) \rangle$, $\dim S = 1$.

Ortonormalizziamo la base $\{(2,-1,-1)\}$ di S.

Si ottiene, normalizzando $(2,-1,-1)$, la base ortonormale

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (2,-1,-1) \right\} .$$

(b) Determiniamo $S^\perp$.

$S^\perp : \ 2x - y - z = 0$, dunque $S^\perp = \langle (1,2,0), (1,0,2) \rangle$

$\dim S^\perp = 2$. Ortonormalizziamo tramite il procedimento di Gram-Schmidt la base $\{(1,2,0), (1,0,2)\}$.

$$u_1 = \frac{(1,2,0)}{\|(1,2,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

$$u_2' = (1,0,2) - ((1,0,2) \cdot u_1) u_1 =$$

$$= (1,0,2) - \frac{1}{5}(1,2,0) = \frac{1}{5}(4,-2,10) = \frac{2}{5}(2,-1,5)$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5)$$

Otteniamo la base ortonormale $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5) \right\}$ di $S^\perp$.

(c) $v = (3,-3,-3)$, allora $v = v_{/\!/} + v_\perp$ con $v_{/\!/} \in S^\perp$ e $v_\perp \in S$.

(si ha $(S^\perp)^\perp = S$.)

La proiezione ortogonale su $S^\perp$ di v è $v_{/\!/}$. Per calcolare $v_{/\!/}$ possiamo usare la ricetta descritta nell'esercizio precedente in termini di una base ortonormale di $S^\perp$, oppure possiamo calcolare $v_\perp$ tramite la stessa ricetta in termini di una base ortonormale di S.

Poiché $\dim S = 1$ optiamo per questa seconda via.

$$v_{\perp} = \left(v \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1) \right) \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1) = \frac{1}{6}\Big((3,-3,-3) \cdot (2,-1,-1) \Big)(2,-1,-1)$$

$$= (4,-2,-2)$$

Dunque la proiezione ortogonale di $(3,-3,-3)$ su $S^{\perp}$ è

$$v_{/\!/} = (3,-3,-3) - (4,-2,-2) = (-1,-1,-1)$$

(d) Il vettore generico di T è

$\alpha(1,0,1) + \beta(3,-1,0)$. Calcoliamo la sua proiezione ortogonale su U ed imponiamo che sia $(4,-2,5)$.

Poiché $U^{\perp} = \langle (1,2,0) \rangle$ ed una base ortonormale di $U^{\perp}$ è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \right\}$, si ha che se $v = \alpha(1,0,1) + \beta(3,-1,0)$,

$v = v_{/\!/} + v_{\perp}$ con $v_{/\!/} \in U$ e $v_{\perp} \in U^{\perp}$

e $$v_{\perp} = \left(v \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) \right) \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) = \frac{v \cdot (1,2,0)}{5}(1,2,0)$$

dunque $$v_{\perp} = \frac{\alpha+\beta}{5}(1,2,0)$$

segue che

$$(4,-2,5) = v_{/\!/} = (\alpha+3\beta, -\beta, \alpha) - \frac{\alpha+\beta}{5}(1,2,0)$$

Ossia

$$(4,-2,5) = \frac{1}{5}\left(4\alpha+14\beta, -2\alpha-7\beta, 5\alpha\right)$$

Risolvendo il sistema che si ottiene si trova $\alpha=5, \beta=0$.

Dunque il vettore $(5,0,5)$ ha come proiezione ortogonale su V il vettore $(4,-2,5)$.

(e) Determiniamo la matrice associata alla proiezione ortogonale sul sottospazio $S^\perp = \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5) \right\rangle$

poiché abbiamo una base ortonormale di $S^\perp$, allora abbiamo:

$$\pi_{S^\perp}(v) = \left(v \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0) + \left(v \cdot \frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,5)\right)\frac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,+5)$$

Quindi se $v=(x,y,z)$ allora

$$\pi(v) = \frac{1}{5}(x+2y)(1,2,0) + \frac{1}{30}(2x-y+5z)(2,-1,5) =$$

$$= \frac{1}{30}\left(6x+12y+4x-2y+10z, 12x+24y-2x+y-5z, 10x-5y+25z\right)$$

$$= \frac{1}{30}\left(10x+10y+10z, 10x+25y-5z, 10x-5y+25z\right)$$

$$A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$ in effetti è una matrice simmetrica di $rg = 2$

Come trovare la matrice della simmetria $\sigma_{S^\perp, S}$?

In generale se abbiamo $V = U + W$ allora

ogni vettore $v \in V$ si scrive come $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$

e $\pi_{U,W}(v) = u$, $\pi_{W,U}(v) = w$.

Allora $\sigma_{U,W}(v) = u - w = \pi_{U,W}(v) - \pi_{W,U}(v)$

Inoltre $(id - \pi_{U,W})(v) = (u+w) - u = w = \pi_{W,U}(v)$

Quindi $\sigma_{U,W} = \pi_{U,W} - \pi_{W,U} = \pi_{U,W} - (id - \pi_{U,W}) = 2\pi_{U,W} - id$

e $\pi_{U,W} = \frac{1}{2}(\sigma_{U,W} + id)$

Cioè se conosciamo π otteniamo $\sigma = 2\pi - id$

e se conosciamo σ otteniamo $\pi = \frac{1}{2}(id + \sigma)$.

Stessa cosa per le matrici, nel caso dell'esercizio:

$$B = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\sigma_{S^\perp,S}} = 2A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\pi} - I_3 = \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

verificare che, $(2,-1,-1) \in S^\perp$

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i sottospazi $U = \langle (1,1,1), (1,0,1) \rangle$ e $V = \langle (2,1,1), (0,1,1) \rangle$.

(a) Calcolare la proiezione ortogonale $p_V(1,0,1)$ di $(1,0,1)$ su V.

(b) Determinare un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non appartenente ad U tale che la sua proiezione ortogonale su U, $p_U(v)$, sia esattamente $(1,0,1)$.

(c) Determinare i vettori di V la cui proiezione ortogonale su U appartiene al sottospazio $\langle (1,0,1) \rangle$.

(d) Determinare tutti i vettori $u \in U$ e $v \in V$ tali che $p_U(v) = u$ e $p_V(u) = v$.

(e) Scrivere le matrici di P_U e P_V nella base canonica

<u>Svolgimento</u>:

(a) Si ha $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$, determiniamo $V^\perp$ (ciò equivale a determinare un'equazione di V)

$(x,y,z) \in V^\perp$ se e solo se

- $(x,y,z) \cdot (2,1,1) = 0$
- $(x,y,z) \cdot (0,1,1) = 0$

Bisogna quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene $V^\perp = \langle (0,1,-1) \rangle$

(infatti V è definito dall'equazione $y - z = 0$)

Determiniamo $p_V(1,0,1)$.

Si ha $(1,0,1) = p_V(1,0,1) + p_{V^\perp}(1,0,1)$

dove $p_{V^\perp}(1,0,1)$ è la proiezione ortogonale di $(1,0,1)$ su $V^\perp$

($p_V(1,0,1)$ e $p_{V^\perp}(1,0,1)$ li abbiamo a volte anche

indicati con $v_{\parallel}$ e $v_{\perp}$ rispettivamente)

Poiché $V^\perp = \langle (0,1,-1) \rangle$, dalla formula generale per calcolare la proiezione ortogonale su un sottospazio, conoscendo una base ortonormale del sottospazio, deriva

$$p_{V^\perp}(1,0,1) = \left((1,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) \right) \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

cioè

$$p_{V^\perp}(1,0,1) = -\frac{1}{2}(0,1,-1)$$

Dunque $p_V(1,0,1) = (1,0,1) - p_{V^\perp}(1,0,1) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

[Fare la verifica che $(1,0,1) = p_V(1,0,1) + p_{V^\perp}(1,0,1)$ e che $p_V(1,0,1) \in V$ e $p_{V^\perp}(1,0,1) \in V^\perp$.]

(b) Si ha $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$.

Determiniamo $U^\perp$: $(x,y,z) \in U^\perp \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x \quad +z=0 \end{cases}$

Risolvendo si ottiene $U^\perp = \langle (1,0,-1) \rangle$.

Sappiamo che $p_U^{-1}(1,0,1) = (1,0,1) + \ker(p_U)$

Ma si ha $\ker(p_U) = U^\perp$, dunque

$p_U^{-1}(1,0,1) = (1,0,1) + \langle (1,0,-1) \rangle$

Poiché U e $U^\perp$ sono in somma diretta, l'unico vettore di $p_U^{-1}(1,0,1)$ contenuto in U è $(1,0,1)$; dunque, ad esempio, $(2,0,0) = (1,0,1) + (1,0,-1)$ non è contenuto in U ed ha come proiezione ortogonale su U il vettore $(1,0,1)$.

(c) Determiniamo $p_U^{-1}(\langle (1,0,1) \rangle)$.

Si ha $p_U^{-1}(\alpha(1,0,1)) = \alpha(1,0,1) + \langle (1,0,-1) \rangle$ usando lo stesso ragionamento del punto (b).

Ma quindi, poiché $v \in p_U^{-1}(\langle (1,0,1) \rangle)$ se e solo se per un qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, $p_U(v) = \alpha(1,0,1)$ (cioè $v \in p_U^{-1}(\alpha,0,\alpha)$)

si ha $v \in (\alpha, 0, \alpha) + \langle (1,0,-1) \rangle$, cioè

$v = \alpha(1,0,1) + \beta(1,0,-1)$. Si deduce che

$p_U^{-1}(\langle 1,0,1 \rangle) = \langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle$

Intersechiamo ora $\langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle$ con V.

Si ha che il sottospazio $\langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle$ è definito dall'equazione $y = 0$.

Cerchiamo i vettori del tipo $\alpha(2,1,1) + \beta(0,1,1)$ per i quali si abbia $y = 0$.

Questi sono tutti i vettori del sottospazio $\langle (2,1,1) - (0,1,1) \rangle$,

cioè $\langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle \cap V = \langle (2,0,0) \rangle = \langle (1,0,0) \rangle$.

Si conclude che i vettori v di V la cui proiezione ortogonale $p_U(v)$ su U sia $(1,0,1)$ sono della forma $(\alpha,0,0)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) Si ha $v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$, con $p_U(v) \in U$ e $p_{U^\perp}(v) \in U^\perp$.

Poiché $p_U(v) = u$, segue che $v = u + p_{U^\perp}(v)$

Chiamando, per concisione, z il vettore $p_{U^\perp}(v)$

si ha $v = u + z$, con $z \in U^\perp$.

Applicando ora p_V alla suscritta equazione, si ha

$$p_V(v) = p_V(u) + p_V(z).$$

Ma $p_V(v) = v$ e $p_V(u) = v$, dunque segue che $p_V(z) = 0$,

cioè $z \in V^\perp$. Ma quindi $z \in U^\perp \cap V^\perp = \langle (1,0,-1) \rangle \cap \langle (0,1,-1) \rangle$

Poiché $\langle (1,0,-1) \rangle \cap \langle (0,1,-1) \rangle = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ segue che $z = (0,0,0)$ e

quindi $v = u$.

Si conclude che i vettori $u \in U$, $v \in V$ tali che $p_U(v) = u$ e $p_V(u) = v$, sono del tipo $u = v \in U \cap V = \langle (1,1,1) \rangle$.