Foglio di esercizi 10

Esercizio 1 In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio $U =< (1,1,1,1) >$.

(a) Determinare una base ortonormale di U.

(b) Determinare una base ortonormale di $U^\perp$.

(c) Determinare la proiezione ortogonale su $U^\perp$ del vettore $(4,1,2,1)$.

(d) Determinare la proiezione ortogonale su $U^\perp$ del sottospazio $< (1,0,0,0), (0,0,0,1) >$.

Esercizio 2 Al variare di a in $\mathbb{R}$, si considerino il sottospazio $U_a =< (1,0,1), (1+a, -a, a-1) >$ di $\mathbb{R}^3$ ed il vettore $v = (2,-1,3)$.

(a) Per $a = 1$, calcolare la proiezione ortogonale $p_{U_1}(v)$ di v su U_1.

(b) Per $a = 1$, determinare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ che abbiano la stessa proiezione ortogonale di v su U_1.

(c) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la proiezione $p_{U_a}(v)$ è nulla.

(d) Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali la norma della proiezione ortogonale $p_{U_a}(v)$ sia uguale a $\sqrt{13}$.

Esercizio 3 In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio $U =< (2,0,1,-1), (1,0,1,0), (1,-1,-1,0) >$.

(a) Determinare una base ortonormale di $U^\perp$.

(b) Determinare una base ortonormale di U.

(c) L'unione di queste due basi è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$?

(d) Determinare la proiezione ortogonale di $(1,0,0,0)$ su U.

(e) Determinare tutti i vettori del sottospazio $W =< (1,0,0,0), (0,0,0,1) >$ la cui proiezione ortogonale su U appartiene al sottospazio $< (1,0,0,1) >$.

Esercizio 4 Si consideri $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale.

(a) Determinare la proiezione ortogonale del vettore $(1,4,-3,-2)$ su V, dove $V^\perp =< (1,1,0,1), (1,0,1,0) >$.

(b) Determinare un sistema lineare che abbia come soluzione V.

(c) Determinare la proiezione ortogonale di $(1,4,-3,-2)$ su W, dove $W^\perp =< (2,0,1,1) >$.