Abbiamo visto due classi importanti di endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale:

(i) le isometrie

(ii) le proiezioni ortogonali

Queste ultime sono casi particolari di una classe più ampia di endomorfismi, gli endomorfismi simmetrici, che ora andiamo a definire e studiare.

<u>Def</u>: Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale. L'endomorfismo ϕ si dice simmetrico se

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(v)\cdot w = v \cdot \phi(w).$$

<u>Def</u>: Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A si dice simmetrica se si ha

$$A^t = A.$$

<u>Esempio</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$ è una matrice simmetrica.

Vediamo ora il legame tra endomorfismi simmetrici e matrici simmetriche.

<u>Prop:</u> Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$.
Allora ϕ è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale se e solo se la matrice $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$ è simmetrica.

<u>dim.</u>

Sia $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

La matrice $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ è simmetrica se e solo se $\forall i,j$, $a_{ij} = a_{ji}$.
Se $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, etc. sono i vettori della base canonica si ha $a_{ij} = e_i \cdot \phi(e_j)$.
Dunque se ϕ è un endomorfismo simmetrico si ha

$$a_{ij} = e_i \cdot \phi(e_j) = \phi(e_i) \cdot e_j = e_j \cdot \phi(e_i) = a_{ji} ;$$

quindi $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ è una matrice simmetrica.
Viceversa, se $a_{ij} = a_{ji}$ si ha $e_i \cdot \phi(e_j) = \phi(e_i) \cdot e_j$.
Per la linearità di ϕ e la bilinearità del prodotto scalare questo implica che $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$, $v \cdot \phi(w) = \phi(v) \cdot w$. $\square$

<u>Oss:</u> Se $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$, $v = (x_1, \dots, x_n)$, $w = (y_1, \dots, y_n)$, allora si ha $v \cdot \phi(w) = (x_1 \cdots x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Il teorema fondamentale sugli endomorfismi simmetrici è il seguente.

<u>Teorema</u>: (teorema spettrale) Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$. Allora si ha che ϕ è un endomorfismo simmetrico di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale se e solo se ammette una base ortonormale di autovettori.

L'equivalente matriciale di questo teorema è il seguente.

<u>Teorema</u>: (teorema spettrale) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Allora A è simmetrica se e solo se è ortogonalmente diagonalizzabile, ossia se e solo se esistono una matrice ortogonale H ed una matrice diagonale D tali che $D = H^{-1}AH = H^tAH$.

<u>Oss</u>: Se A è ortogonalmente diagonalizzabile è facile vedere che A è una matrice simmetrica. Infatti,

$$D = H^{-1}AH \Rightarrow A = HDH^{-1} = HDH^t,$$ ma allora

$$A^t = (HDH^t)^t = (H^t)^t D^t H^t = HDH^t = A,$$

cioè A è simmetrica.

Il fatto che una matrice simmetrica sia ortogonalmente diagonalizzabile è più profondo e lo vedremo solo nei casi $n=2$ e $n=3$.

caso $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(A - tI_2) = t^2 - (a+c)t + (ac - b^2).$$

Le radici di questo polinomio sono

$$\lambda_1 = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \quad \text{e}$$

$$\lambda_2 = \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

λ_1 e λ_2 sono reali poiché $(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 \iff a = c$ e $b = 0$

ossia $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Questa matrice è diagonale quindi ortogonalmente diagonalizzabile.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ la matrice A è diagonalizzabile poiché la molt. alg. di ciascun autovalore è 1.

Sia v_1 un autovettore di A di autovalore λ_1 e tale che $\|v_1\| = 1$.

Sia v_2 un autovettore di A di autovalore λ_2 e tale che $\|v_2\| = 1$.

Si ha che v_1 e v_2 sono ortogonali, infatti se ϕ è l'endomorfismo simmetrico di matrice A si ha

$$\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = \phi(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot \phi(v_2) = \lambda_2 v_1 \cdot v_2$$

Poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2$ segue che $v_1 \cdot v_2 = 0$, dunque $\{v_1, v_2\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$.

caso $n=3$

$A \in M_3(\mathbb{R})$ è simmetrica, sia $\phi \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo simmetrico rappresentato da A.

Il polinomio caratteristico di A ha grado 3, dunque ha una radice reale α. Sia v_1 un versore che sia autovettore di ϕ (o di A) di autovalore α.

Completiamo v_1 ad una base ortonormale $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$

Si ha, se $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\phi} = \left(A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}\right)^{-1} A_{\mathcal{E},\mathcal{E},id} \; A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$$

Poiché $\mathcal{E}$ e $\mathcal{V}$ sono basi ortonormali si ha che $H = A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$ è una matrice ortogonale. Ponendo $B = A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\phi}$ e $A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi}$ si ha $B = H^t A H$. Poiché A è simmetrica e H ortogonale si ha $B^t = B$, cioè B è simmetrica.

Inoltre $\phi(v_1)\cdot v_2 = v_1 \cdot \phi(v_2)$, dunque $v_1 \cdot \phi(v_2) = 0$; ed analogamente $v_1 \cdot \phi(v_3) = 0$.

Segue che B è della forma

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è ortogonalmente diagonalizzabile per quanto visto nel caso $n=2$, dunque anche A lo è.

Esercizio: Siano A e B_k le matrici seguenti, la seconda dipendente dal parametro k

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad B_k = \begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ k^2 & -2k & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare autovalori e autovettori di A. La matrice A è diagonalizzabile?

(b) Determinare, se esiste, una base ortonormale di autovettori di A. Scrivere quindi una matrice K ortogonale tale che $K^t A K = D$ con D diagonale.

(c) Determinare tutti i valori $k \in \mathbb{R}$ per i quali $(1,1,1)$ è autovettore di B_k. Per quale autovalore?

(d) Per i valori di k trovati in (c), la matrice B_k è diagonalizzabile?

(e) Tra i valori di k trovati al punto (c), ce n'è qualcuno per cui B_k sia simile ad A? In caso affermativo, determinare una matrice H tale che $H^{-1} A H = B_k$. È possibile trovare una tale matrice H che sia anche ortogonale?

Svolgimento:

(a) La matrice A è simmetrica dunque è diagonalizzabile.

Polinomio caratteristico di A:

$$P(t) = \det\left(A - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} 6-t & 1 & 0 \\ 1 & 6-t & 0 \\ 0 & 0 & 7-t \end{pmatrix} = (t-5)(t-7)^2$$

autovalore 5 di molt. alg. 1

$$V_5 = \ker\left(A - 5I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0) \rangle$$

autovalore 7 di molt. alg. 2

$$V_7 = \ker\left(A - 7I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$$

(b)

Una base ortonormale di V_5 è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \right\}$

Una base ortonormale di V_7 è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right\}$

Una base ortonormale di autovettori si ottiene unendo queste due basi: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), (0,0,1) \right\}$.

Ponendo $K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ha che K è ortogonale e

$$K^t A K = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$B_k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ k^2 & -2k & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ k^2-2k-1 \end{pmatrix}$$

Dunque $(1,1,1)$ è autovettore di B_k se e solo se

$k^2-2k-1=7$ ossia $k^2-2k-8=0$

Cioè $k=4$ e $k=-2$, l'autovalore è 7.

(d) $k=4$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ 16 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico:

$$P(t) = \det(B_4 - tI_3) = \det \begin{pmatrix} 15-t & -4 & -4 \\ 4 & 5-t & -2 \\ 16 & -8 & -1-t \end{pmatrix} = -(t-7)^2(t-5)$$

autospazi:

$$V_5 = \ker(B_4 - 5I_3) = \ker \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 16 & -8 & -6 \end{pmatrix} = \langle (2,1,4) \rangle$$

$$V_7 = \ker(B_4 - 7I_3) = \ker \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \\ 16 & -8 & -8 \end{pmatrix} = \langle (1,2,0), (1,0,2) \rangle$$

B_4 è diagonalizzabile; si ha

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} B_4 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$k = -2$

$$B_{-2} = \begin{pmatrix} 15 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico:

$$P(t) = \det\left(B_{-2} - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} 15-t & -4 & -4 \\ 4 & 5-t & -2 \\ 4 & 4 & -1-t \end{pmatrix} = -(t-1)(t-7)(t-11)$$

B_{-2} ha tre autovalori distinti dunque è diagonalizzabile.

(e)

B_{-2} non ha stesso polinomio caratteristico di A, dunque non è simile ad A.

B_4 ha stesso polinomio caratteristico di A ed è diagonalizzabile come anche A, dunque A e B_4 sono simili.

Poiché
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e
$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} B_4 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

segue che

$$B_4 = H^{-1} A H \quad \text{con} \quad H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

(calcolare tale matrice)

H non può essere trovata ortogonale poiché B_4 non è simmetrica.