Vediamo ora due classi di endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare euclideo: **Isometrie** e **Endomorfismi Simmetrici**

Isometrie.

Def: Un endomorfismo $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ tale si abbia

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \phi(x) \cdot \phi(y) = x \cdot y$ si dice un'isometria di $\mathbb{R}^n$.

(ossia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ è un'isometria se rispetta il prodotto scalare)

Prop: Siano $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ dei vettori non nulli a due a due ortogonali, allora $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

dim. Sia $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0_{\mathbb{R}^n}$, mostriamo che $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$.

Si ha $v_1 \cdot (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = v_1 \cdot 0_{\mathbb{R}^n} = 0$, ma per la bilinearità del prodotto scalare (proprietà 2, 3) si ha

$v_1 \cdot (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m) = \alpha_1 (v_1 \cdot v_1) + \alpha_2 (v_1 \cdot v_2) + \dots + \alpha_m (v_1 \cdot v_m)$

dunque $\alpha_1 \|v_1\|^2 = 0$ poiché i vettori sono tra loro ortogonali.

Ma $\|v_1\| \neq 0$ quindi $\alpha_1 = 0$. Alla stessa maniera si procede per dimostrare $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$. □

Da questa proposizione segue la seguente.

Prop: Un'isometria $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ è invertibile e manda basi ortonormali in basi ortonormali.

Vediamo ora che proprietà possiede la matrice A di un'isometria $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.

$\left(\text{Ossia } A = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\phi} \right)$

<u>Prop</u>: Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è la matrice associata ad un'isometria ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

(i) le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

(ii) le righe di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

(iii) $AA^t = A^tA = I_n$ $\quad$ (ossia $A^t = A^{-1}$)

<u>dim</u>

(i) le colonne di A sono le immagini tramite ϕ dei vettori della base canonica. Poiché la base canonica è ortonormale, anche le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

(iii) Il fatto che le colonne di A formino una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ è equivalente a $A^tA = I_n$, ma questo implica $A^t = A^{-1}$, dunque anche $AA^t = I_n$.

(ii) Il fatto che le righe di A formino una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ è equivalente a $AA^t = I_n$. $\square$

<u>Def</u>: Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $AA^t = A^tA = I_n$ (ossia $A^t = A^{-1}$) si dice ortogonale.

Dunque si può riformulare la proposizione come segue.

<u>Prop</u>: Sia $\phi \in End(\mathbb{R}^n)$ e A la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Allora ϕ è un'isometria di $\mathbb{R}^n$ se e solo se A è una matrice ortogonale

Esempi di Isometrie:

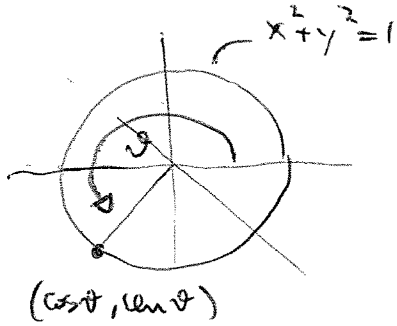
Le isometrie di $\mathbb{R}^2$:

sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'isometria, e

sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\varphi}$ matrice di φ rispetto alla base canonica

Allora $\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ verifica $(\alpha,\gamma)\cdot(\alpha,\gamma) = \alpha^2+\gamma^2 = 1$

quindi $\exists\ \vartheta \in [0, 2\pi)$ t.c. $(\alpha,\gamma) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$:



Inoltre, anche $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ verifica $(\beta,\delta)\cdot(\beta,\delta) = \beta^2+\delta^2 = 1$ quindi

(β,δ) giace sulla ~~stessa~~ circonferenza, e

poiché $(\alpha,\gamma)\cdot(\beta,\delta) = 0$ è ortogonale a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$,

quindi abbiamo 2 possibilità: $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix}$

Cioè la matrice A è della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

per qualche $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Nel primo caso $\det(A) = \cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta = 1$

e nel secondo $\det(A) = -\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta = -1$.

- Nel primo caso $(\det(A) = 1)$ φ è una rotazione di angolo ϑ intorno al punto $O_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$:

infatti se scriviamo un vettore non nullo $v = \rho(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

il vettore $\varphi(v) = \rho \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} =$

$$= \rho \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\vartheta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\vartheta \\ \cos\alpha\operatorname{sen}\vartheta + \operatorname{sen}\alpha\cos\vartheta \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\vartheta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\vartheta) \end{pmatrix}$$

Possiamo notare che in questo caso

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta - t & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta - t \end{vmatrix} = t^2 - 2\cos\vartheta\, t + 1$$

Quindi se $\vartheta \neq 0, \pi$ il pol. caratteristico non ha radici reali. Se $\vartheta = 0$ allora $A = I_2$,

e se $\vartheta = \pi$ allora $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$,

entrambe diagonali.

• Nel secondo caso invece $(\det(A) = -1)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$ studiamo il polin. caratteristico:

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos\vartheta - t & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta - t \end{vmatrix} = t^2 - (\cos\vartheta)^2 - (\operatorname{sen}\vartheta)^2 = t^2 - 1$$

ha 2 radici reali $t = 1$ e $t = -1$, quindi

è diagonalizzabile, troviamo gli autospazi:

i) osserviamo che $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta/2 \\ \operatorname{sen}\vartheta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\vartheta/2 + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\vartheta/2 \\ \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta/2 - \cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta/2 \end{pmatrix}$

quindi $A\begin{pmatrix} \cos\vartheta/2 \\ \operatorname{sen}\vartheta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta - \vartheta/2) \\ \operatorname{sen}(\vartheta - \vartheta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta/2 \\ \operatorname{sen}\vartheta/2 \end{pmatrix}$

quindi l'autospazio V_1 è generato da $v = (\cos\vartheta/2, +\operatorname{sen}\vartheta/2)$

ii) Analogamente $A\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\vartheta/2 \\ \cos\vartheta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\vartheta/2 \\ -\cos\vartheta/2 \end{pmatrix}$

quindi V_{-1} è generato da $w = (-\operatorname{sen}\vartheta/2, \cos\vartheta/2)$

Inoltre $v \cdot w = 0$.

Quindi in questo caso φ è una simmetria ortogonale di asse $V_1 = \langle(\cos\vartheta/2, \operatorname{sen}\vartheta/2)\rangle$ ///

In $\mathbb{R}^3$ invece la situazione è un po' più complicata ...

Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un'isometria, e sia

$A = A_{\varepsilon,\varepsilon,\varphi}$ la matrice di φ nella base canonica.

Allora $P_A(t) = \det(A - tI_3)$ è un pol. reale di grado 3, quindi ha almeno una radice α.

Sia $v \neq 0$ un autovettore: $\varphi(v) = \alpha v$.

Allora $\overset{\neq 0}{v \cdot v} = \varphi(v) \cdot \varphi(v) = \alpha^2 (v \cdot v)$,

quindi $\alpha^2 = 1$, cioè $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$.

Sappiamo che $\mathbb{R}^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$, dove $\dim \langle v \rangle^\perp = 2$.

Prendiamo una base ortonormale $\{v_2, v_3\}$ di $\langle v \rangle^\perp$,

e prendiamo $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$, otteniamo $\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{V}$ base $\mathbb{R}$ ortonorm.

$$\rightsquigarrow \quad A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$$

dove $\begin{pmatrix} a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 \end{pmatrix}$ è una matrice di ISOMETRIA di $\mathbb{R}^2$.