Quando consideriamo le somme dirette, $V = S \oplus T$

è utile sapere esplicitamente come scrivere un vettore

$v \in V$ in $v = s + t$ con $s \in S$ e $t \in T$

(sappiamo che questa scrittura è unica); ma

questo non è sempre facile:

<u>p. es.</u> $\mathbb{R}^2 = \langle (1,5) \rangle \oplus \langle (3,4) \rangle$

come scriviamo $v = (7,2)$ come $(7,2) = s(1,5) + t(3,4)$?

sistema $\begin{cases} s + 3t = 7 \\ 5s + 4t = 2 \end{cases} \to \begin{cases} s = -2 \\ t = 3 \end{cases}$ $\quad (7,2) = \underset{\langle (1,5) \rangle}{\underset{\ni}{(-2,-10)}} + \underset{\langle (3,4) \rangle}{\underset{\ni}{(9,12)}}$

se invece gli spazi sono ortogonali è più "semplice":

$\mathbb{R}^2 = \langle (1,5) \rangle \oplus \langle (5,-1) \rangle$ con $(1,5) \cdot (5,-1) = 0$

scriviamo $(7,2)$ nelle 2 componenti usando il prod. scalare:

$(7,2) \cdot (1,5) = 17 \qquad (7,2) \cdot (5,-1) = 33$

$(1,5) \cdot (1,5) = 26 \qquad (5,-1) \cdot (5,-1) = 26$

$$\to (7,2) = \frac{17}{26}(1,5) + \frac{33}{26}(5,-1) = \left(\frac{17+165}{26}, \frac{85-33}{26} \right)$$

Abbiamo usato la seguente osservazione: se $u \cdot w = 0$

e se $v = \lambda u + \mu w$ allora $v \cdot u = \lambda\, u \cdot u$

e $v \cdot w = \mu\, w \cdot w$

<u>Def</u>: $T \subset \mathbb{R}^n$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Si dice ortogonale di T e si indica $T^\perp$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito dai vettori ortogonali ad ogni vettore di T:

$$T^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \forall t \in T,\ v \cdot t = 0 \}$$

<u>Prop</u>: $T^\perp$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

<u>dim</u>. Se $v_1, v_2 \in T^\perp$, allora si ha $v_1 \cdot t = 0$ e $v_2 \cdot t = 0$, $\forall t \in T$. Ma quindi $(v_1 + v_2) \cdot t = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = 0 + 0 = 0$, $\forall t \in T$; cioè $v_1 + v_2 \in T^\perp$. Allo stesso modo si ha $(\lambda v_1) \cdot t = \lambda (v_1 \cdot t) = 0$ $\forall t \in T$.

Dunque $\lambda v_1 \in T^\perp$, e quindi $T^\perp$ è un sottospazio. □

<u>Prop</u>: Se $T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$, allora si ha

$$T^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot t_1 = 0, \dots, v \cdot t_m = 0 \}.$$

<u>dim</u>.

Facciamo vedere che se $v \in \mathbb{R}^n$ è tale che $v \cdot t_1 = \dots = v \cdot t_m = 0$, allora $v \cdot t = 0$, $\forall t \in T$.

Sia $t \in T$, allora $t = \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_m t_m$ per una certa scelta di $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Dunque $v \cdot t = v \cdot (\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_m t_m) = \alpha_1 (v \cdot t_1) + \dots + \alpha_m (v \cdot t_m)$ segue che $v \cdot t = \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_m \cdot 0 = 0$, cioè si ha $v \in T^\perp$. □

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^4$, sia $U = \langle (1,1,-1,-1), (1,2,0,0) \rangle$.

Determinare una base di $U^\perp$.

<u>Svolgimento</u>:

Si ha $U^\perp = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x,y,z,w) \cdot (1,1,-1,-1) = 0$ e

$(x,y,z,w) \cdot (1,2,0,0) = 0 \}$. Dunque

$$U^\perp : \begin{cases} x+y-z-w = 0 \\ x+2y = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$U^\perp = \langle (2,-1,1,0), (2,-1,0,1) \rangle$; $\dim U^\perp = 2$

$\{ (2,-1,1,0), (2,-1,0,1) \}$ è una base di $U^\perp$.

<u>Oss</u>: Vediamo che $\dim U + \dim U^\perp = 2+2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$; questo è un fatto generale: per qualsiasi $T \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio si ha $T \oplus T^\perp = \mathbb{R}^n$. Dimostriamolo.

<u>Prop</u>: Sia $T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio di dimensione m di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim T^\perp = n-m$ e $T \cap T^\perp = \{ 0_{\mathbb{R}^n} \}$; ossia si ha $T \oplus T^\perp = \mathbb{R}^n$.

<u>dim</u>. Se $t \in T \cap T^\perp$, si ha $t \cdot t = 0$, dunque $t = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ossia si ha $T \cap T^\perp = \{ 0_{\mathbb{R}^n} \}$. Inoltre se $\{ t_1, \dots, t_m \}$ è una base di T, si ha che $T^\perp$ è definito dal sistema di m equazioni $v \cdot t_1 = 0, \dots, v \cdot t_m = 0$. Queste equazioni sono lin. ind.

dunque si ha $\dim T^{\perp} = n - m$. □

Proiezioni ortogonali.

Da quanto discusso sopra si ha che per qualsiasi sottospazio T di $\mathbb{R}^n$ è possibile definire la proiezione $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ su T lungo $T^{\perp}$.

Tale proiezione viene detta <u>proiezione ortogonale su T</u>.

<u>Esercizio:</u> In $\mathbb{R}^4$, sia $U = \langle (1,1,-1,-1), (1,2,0,0) \rangle$.

Calcolare la proiezione ortogonale [redacted] su U di $(4,1,-1,0)$

<u>Svolgimento:</u>

Poiché $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^{\perp}$, si ha $(4,1,-1,0) = v_{\parallel} + v_{\perp}$, con $v_{\parallel} \in U$ e $v_{\perp} \in U^{\perp}$ e tale decomposizione è unica.

La proiezione ortogonale di $(4,1,-1,0)$ su U è il vettore $v_{\parallel}$.

Calcoliamo $v_{\parallel}$.

Il vettore $v_{\parallel}$ sarà della forma $\alpha(1,1,-1,-1) + \beta(1,2,0,0)$, dunque $v_{\perp} = (4,1,-1,0) - \alpha(1,1,-1,-1) - \beta(1,2,0,0)$.

Richiediamo che $v_{\perp} \in U^{\perp}$, cioè $v_{\perp} \cdot (1,1,-1,-1) = 0$ e $v_{\perp} \cdot (1,2,0,0) = 0$.

Si ottiene il seguente sistema per α, β:

$$\begin{cases} v_\perp \cdot (1,1,-1,-1) = 0 \\ v_\perp \cdot (1,2,0,0) = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 6 - 4\alpha - 3\beta = 0 \\ 6 - 3\alpha - 5\beta = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 6 \\ 3\alpha + 5\beta = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ 3\alpha + 5\beta = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta = \frac{6}{11} \end{cases}$$

Dunque

$$v_\perp = \frac{12}{11}(1,1,-1,-1) + \frac{6}{11}(1,2,0,0) = \frac{6}{11}(3,4,-2,-2) .$$

Un'altra maniera di risolvere l'esercizio passa attraverso il calcolo di una base ortonormale di V. Infatti per una base ortonormale il sistema diventa molto più semplice.

Sia $\{u_1, u_2\}$ una base ortonormale di V.

Allora $v_\parallel = \alpha u_1 + \beta u_2$ e $v_\perp = (4,1,-1,0) - \alpha u_1 - \beta u_2$.

Imponendo $v_\perp \in V^\perp$ si ha

$$\begin{cases} v_\perp \cdot u_1 = 0 \\ v_\perp \cdot u_2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} (4,1,-1,0) \cdot u_1 - \alpha\, u_1 \cdot u_1 - \beta\, u_2 \cdot u_1 = 0 \\ (4,1,-1,0) \cdot u_2 - \alpha\, u_1 \cdot u_2 - \beta\, u_2 \cdot u_2 = 0 \end{cases}$$

e poiché $u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = 1$ e $u_1 \cdot u_2 = 0$, si ha

$$\begin{cases} \alpha = (4,1,-1,0) \cdot u_1 \\ \beta = (4,1,-1,0) \cdot u_2 \end{cases} .$$

Calcoliamo dunque una base ortonormale $\{u_1, u_2\}$ di V.
Applichiamo Gram-Schmidt alla base $\{(1,1,-1,-1), (1,2,0,0)\}$.

$$u_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$$

$$u_2' = (1,2,0,0) - \left((1,2,0,0) \cdot u_1\right) u_1 = (1,2,0,0) - \frac{3}{4}(1,1,-1,-1)$$

$$= \frac{1}{4}(1,5,3,3)$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} = \frac{1}{2\sqrt{11}}(1,5,3,3)$$

Dunque $\alpha = (4,1,-1,0) \cdot \frac{1}{2}(1,1,-1,-1) = 3$ e

$$\beta = (4,1,-1,0) \cdot \frac{1}{2\sqrt{11}}(1,5,3,3) = \frac{3}{\sqrt{11}}$$

Quindi la proiezione ortogonale di $(4,1,-1,0)$ su V è

$$v_{\parallel} = \frac{3}{2}(1,1,-1,-1) + \frac{3}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{11}}(1,5,3,3) =$$

$$= \frac{3}{2}(1,1,-1,-1) + \frac{3}{2 \cdot 11}(1,5,3,3) =$$

$$= \frac{3}{11}(6,8,-4,-4) = \frac{6}{11}(3,4,-2,-2).$$

Oss: Se $T \subset \mathbb{R}^n$, $\{t_1, \dots, t_m\}$ è una base ortonormale di T, e $v \in \mathbb{R}^n$. Lo stesso ragionamento fatto sopra dimostra che la proiezione ortogonale $v_{\parallel}$ di v su T è

$$v_{\perp} = (v \cdot t_1) t_1 + \dots + (v \cdot t_m) t_m.$$