Per molte applicazioni dell'algebra lineare la nozione di spazio vettoriale non è sufficiente. È necessario introdurre

- una nozione di grandezza di un vettore
- una nozione di angolo tra due vettori

Queste nozioni possono essere definite a partire dal concetto di prodotto scalare che ora andiamo a definire e studiare.

Def: Sia $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Si definisce il prodotto scalare usuale o euclideo tra v e w come segue

$$v \cdot w = v \, I_n \, w^t = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

Oss: Il prodotto scalare è così chiamato perché il risultato del prodotto scalare di due vettori è un numero reale.

Proprietà del prodotto scalare

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot y = y \cdot x$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda x) \cdot y = \lambda (x \cdot y)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot x \geq 0 \quad$ e $\quad x \cdot x = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$

Esempio: $(2,0,-1)\cdot(1,4,3) = 2\cdot 1 + 0\cdot 4 + (-1)3 = -1$

Grazie alla proprietà 4 possiamo dare la seguente definizione.

Def: Consideriamo $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale.

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo $\|x\| = \sqrt{x\cdot x}$. Il numero reale positivo $\|x\|$ si dice norma di x.

Vettori di norma 1 si dicono versori.

Esempi: (i) $(0,0,0)$ ha norma 0

(ii) $\|(1,0,0)\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$; $(1,0,0)$ è un versore

(iii) $\|(2,-1,3)\| = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}$.

Proprietà della norma. (La verifica è facile dalla definizione)

a) $\|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

b) se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

Ulteriori proprietà (La verifica richiede una dimostrazione non banale)

c) disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x\cdot y| \leq \|x\|\,\|y\|$

d) disuguaglianza triangolare

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz permette di definire l'angolo tra due vettori.

<u>**Def**</u>: Dati due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ non nulli, si definisce il coseno dell'angolo tra v e w come segue

$\cos(\widehat{vw}) =$ [redacted] $\dfrac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|}$

<u>Esempio</u>: $v = (1, 0)$, $w = (-1, -1)$, allora si ha

$\cos(\widehat{vw}) = \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \dfrac{1(-1) + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$ [redacted] $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$

ossia

$$\cos(\widehat{vw}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

dunque $\widehat{vw} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$

Abbiamo visto quindi che tramite il prodotto scalare è possibile definire una nozione di lunghezza di un vettore, ossia la norma, e una nozione di angolo tra due vettori.

È quindi possibile definire in particolare l'ortogonalità tra vettori.

<u>Def</u>: Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se si ha

$$v \cdot w = 0$$

<u>Esempio</u>: $(1, 4, -1, 3)$ è ortogonale a $(7, -1, 0, -1)$.

Infatti $(1, 4, -1, 3) \cdot (7, -1, 0, -1) = 1 \cdot 7 + 4(-1) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 0$.

In $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale vi sono delle basi privilegiate, le cosiddette basi ortonormali.

<u>Def</u>: Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale. La base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ si dice ortonormale se

- $\|v_1\| = \|v_2\| = \ldots = \|v_n\| = 1$
  ossia i vettori della base sono versori
- $v_i \cdot v_j = 0$ se $i \neq j$
  ossia i vettori della base sono a due a due ortogonali.

<u>Esempio</u>: La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

ad. es. $n=3$ $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ si ha

- $\|(1,0,0)\| = \|(0,1,0)\| = \|(0,0,1)\| = 1$
- $(1,0,0)\cdot(0,1,0) = (1,0,0)\cdot(0,0,1) = (0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0$

In $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto scalare usuale vi sono molte altre basi ortonormali oltre alla base canonica, vediamo ora un metodo per costruire una base ortonormale a partire da una base qualsiasi di $\mathbb{R}^n$. Questo procedimento va sotto il nome di <u>metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt</u>.

Metodo di Gram – Schmidt

Sia $T \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare usuale, sia $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base di T. Mostriamo come ottenere una base $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ ortonormale di T.

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \left(\text{si normalizza } v_1\right)$$

$$u_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)\, u_1$$

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|} \qquad \left(\text{si normalizza } u_2'\right)$$

$$u_3' = v_3 - (v_3 \cdot u_1)\, u_1 - (v_3 \cdot u_2)\, u_2$$

$$u_3 = \frac{u_3'}{\|u_3'\|}$$

$$\vdots$$

$$u_m' = v_m - (v_m \cdot u_1)\, u_1 - (v_m \cdot u_2)\, u_2 - \dots - (v_m \cdot u_{m-1})\, u_{m-1}$$

$$u_m = \frac{u_m'}{\|u_m'\|}$$

Oss: I vettori u_n sono ottenuti normalizzando i vettori u_n', dunque sono dei versori. Inoltre si verifica facilmente (usando l'induzione) che i vettori $u_1, \dots, u_m$ sono a due a due ortogonali (ossia $u_i \cdot u_j = 0$ se $i \neq j$).

Si verifica $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$, $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$, $\dots$, $\langle v_1, \dots, v_i \rangle =$

<u>Esercizio</u>: In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare euclideo sia

$V: \; x + y + 2z = 0$. Determinare una base ortonormale di V.

<u>Svolgimento</u>:

Troviamo una base di V risolvendo l'equazione che definisce V.

$V = \langle (1,-1,0), (2,0,-1) \rangle$; $\{(1,-1,0),(2,0,-1)\}$ è una base di V.

Ortonormalizziamo tramite il procedimento di Gram-Schmidt la base $\{(1,-1,0),(2,0,-1)\}$ di V.

$$u_1 = \frac{(1,-1,0)}{\|(1,-1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$u_2' = (2,0,-1) - \Big((2,0,-1)\cdot u_1\Big)u_1 =$$

$$= (2,0,-1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(2,0,-1)\cdot(1,-1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) =$$

$$= (2,0,-1) - \frac{2}{2}(1,-1,0) = (1,1,-1)$$

$$u_2 = \frac{(1,1,-1)}{\|(1,1,-1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

Otteniamo la seguente base ortonormale di V:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \right\}$$

Fare la verifica che u_1, u_2 sono dei versori tra loro ortogonali e che soddisfano l'equazione di V