Esercizio: Siano A e D_a le seguenti matrici, la seconda dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D_a = \begin{pmatrix} a+3 & 2a+2 & 0 \\ -a-1 & -2a & 0 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) determinare autovalori ed autospazi di A.

b) La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo determinare una matrice invertibile H ed una matrice diagonale D tali che $D = H^{-1}AH$.

c) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste una matrice invertibile H tale che $D_a = HAH^{-1}$? Esibire una tale H.

Svolgimento:

a) Polinomio caratteristico di A:

$$P(t) = \det(A - tI_3) = \det \begin{pmatrix} -1-t & 3 & 0 \\ -2 & 4-t & 0 \\ -1 & 1 & 2-t \end{pmatrix} =$$

$$= (2-t)\Big((t+1)(t-4) + 6\Big) = (2-t)(t^2-3t+2) = -(t-1)(t-2)^2$$

Gli autovalori di A sono: 1 con molteplicità algebrica 1 e 2 con molteplicità algebrica 2.

Calcolo degli autospazi:

$$V_1 = \ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dunque}$$

$$V_1 : \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad V_1 = \langle (3,2,1) \rangle$$

$\dim V_1 = 1$; la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è uguale alla sua molteplicità geometrica.

$V_2 = \ker\left(A - 2I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dunque

$V_2 : \begin{cases} -x+y = 0 \\ -2x+2y = 0 \\ -3x+3y = 0 \end{cases}$ da cui $V_2 = \langle (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

$\dim V_2 = 2$, quindi la molteplicità algebrica dell'autovalore 2 è uguale alla sua molteplicità geometrica.

v)

Conclusione: Poiché $P(t)$ ha tutte le radici reali e la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla molteplicità geometrica di tale autovalore, la matrice A è diagonalizzabile.

$\mathcal{V} = \{(3,2,1), (1,1,0), (0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di A. Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che

$A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\varphi} = A \quad \left(\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \right).$

Allora si ha $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

e $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi} = A_{\mathcal{E},\mathcal{V},id_{\mathbb{R}^3}} \; A_{\mathcal{E},\mathcal{E},\varphi} \; A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$

cioè definendo $H = A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$ $\left(\text{ossia } H = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

si ha $D = H^{-1} A H$.

c) Valgono le seguenti proposizioni

<u>Prop:</u> Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sono simili e una delle due è diagonalizzabile, anche l'altra lo è.

<u>Prop:</u> Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sono simili esse hanno gli stessi autovalori, con stessa molteplicità algebrica e con stessa molteplicità geometrica (e stesso polinomio caratteristico)

<u>Prop:</u> Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sono diagonalizzabili, allora sono simili se e solo se hanno stesso polinomio caratteristico.

<u>Oss:</u> La prima e la terza sono conseguenze della seconda.

<u>Oss:</u> Esistono matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con stesso polinomio caratteristico, dunque stessi autovalori, stessa molteplicità algebrica per ogni autovalore e stessa molteplicità geometrica per ogni autovalore, che non sono simili.

Un esempio è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimostrazione di questa osservazione prelude alla teoria di Jordan:

se A e B sono simili, anche A^2 e B^2 lo sono, quindi si deve avere $\dim(\ker(A^2)) = \dim(\ker(B^2))$

ma in questo esempio l'uguaglianza non vale.

Dopo questa discussione generale, applichiamo questi risultati al punto c) dell'esercizio.

Da quanto visto la matrice D_a sarà simile alla matrice A se e solo se D_a ha autovalori 1 con molt. alg. 1 e 2 con molt. alg. 2 uguale alla sua molt. geom.

Calcoliamo dunque il polinomio caratteristico di D_a.

$$P(t) = \det\left(D_a - tI_3\right) = \det\begin{pmatrix} a+3-t & 2a+2 & 0 \\ -a-1 & -2a-t & 0 \\ a & a & 1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (1-t)\left((a+3-t)(-2a-t) + 2(a+1)^2\right) =$$

$$= (1-t)\left(t^2 + (a-3)t - 2(a-1)\right) = (1-t)(t-2)\left(t+(a-1)\right)$$

Il polinomio caratteristico di D_a è uguale al polinomio caratteristico di A se e solo se $a=-1$.

Vediamo se D_{-1} è diagonalizzabile.

$$D_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \ker\left(D_{-1} - I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,0,1) \rangle$$

$$V_2 = \ker\left(D_{-1} - 2I_3\right) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0), (1,0,-1) \rangle$$

La molt. alg. è uguale alla molt. geom. sia per l'autovalore 1 che per l'autovalore 2, dunque D_{-1} è diagonalizzabile ed è quindi simile ad A. Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} D_{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque

$$D_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

La matrice H cercata è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

cioè $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Esercizio</u>: Al variare di $a \in \mathbb{R}$ siano dati gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$,

$$f_a(x,y,z) = (ax,\ x+y+az,\ z).$$

a) Dare la matrice di f_a rispetto alla base canonica.

b) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ f_a non è iniettivo? Per tali valori determinare il nucleo di f_a. Vi sono altri valori di a dove f_a ammette nucleo non nullo?

c) Al variare di a dire se f_a è diagonalizzabile e trovare una base che diagonalizzi.

d) Nel caso $a=0$ determinare la matrice associata a f_a rispetto alla base $\{(1,1,0),(-2,-1,0),(1,0,-1)\}$. Tale matrice è diagonalizzabile?

<u>Svolgimento</u>:

a) $f_a(1,0,0) = (a,1,0)$, $f_a(0,1,0) = (0,1,0)$, $f_a(0,0,1) = (0,a,1)$

dunque $A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f_a} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) f_a non è iniettivo $\Longleftrightarrow$ $\det\left(A_{\mathcal{E},\mathcal{E},f_a}\right) = 0$

Calcoliamo tale determinante.

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a$$

Dunque f_a non è iniettivo per $a=0$

$\ker f_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0) \rangle$. Per $a \neq 0$, $\ker f_a = \{(0,0,0)\}$.

c) Polinomio caratteristico:

$$P(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & 0 & 0 \\ 1 & 1-t & a \\ 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = (a-t)(1-t)^2$$

Gli autovalori di g_a sono: $1, a$

caso $a \neq 1, 0$

molt. alg. dell'autovalore $1 = \mathbf{2}$

autospazio V_1

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0) \rangle \qquad \dim V_1 = 1$$

Dunque g_a non è diagonalizzabile se $a \neq 1, 0$.

caso $a = 1$

un solo autovalore

1 di molt. alg. 3

autospazio V_1:

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0), (1,0,-1) \rangle \qquad \dim V_1 = 2$$

dunque g_1 non è diagonalizzabile.

caso $a = 0$

autovalori: 0 di molt. alg. 1, 1 di molt. alg. 2

autospazi:

$$V_0 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle (1,-1,0) \rangle \; ; \; \dim V_0 = 1$$

$$V_1 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle \; ; \; \dim V_1 = 2$$

Il polinomio caratteristico ha tutte le radici reali, inoltre per ogni autovalore la molt. geom. coincide con la molt. alg., dunque f_0 è diagonalizzabile.

Conclusione: f_a è diagonalizzabile se e solo se $a = 0$

una base che diagonalizza f_0 è $\{(1,-1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

rispetto a tali base f_0 ha matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Sia $\mathcal{V} = \{(1,1,0), (-2,-1,0), (1,0,-1)\}$, allora

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V},f_0} = A_{\mathcal{E},\mathcal{V},id_{\mathbb{R}^3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{\mathcal{V},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$$

cioè

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V},f_0} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolando l'inversa si ha $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

dunque $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},f_0} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tale matrice è diagonalizzabile poiché simile ad una matrice diagonalizzabile.