Se $\phi : V \to V$ è un endomorfismo, il caso di maggiore significato geometrico nella scelta delle basi di dominio e codominio è la scelta di una stessa base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ per dominio e codominio.

In questo caso si ha, se $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ è un'altra base di $V$

$$A_{\mathcal{V}',\mathcal{V}',\phi} = H^{-1} A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\phi} H$$

con $H = A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V}$ matrice di passaggio da $\mathcal{V}'$ a $\mathcal{V}$.

<u>Def</u>: Due matrici quadrate $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ si dicono simili se esiste una matrice invertibile $H \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $A = H^{-1} B H$.

<u>Prop</u>: Matrici simili rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse.

<u>dim</u>. La matrice invertibile $H$ può essere pensata come matrice di cambiamento di base. $\square$

<u>Prop</u>: Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono simili allora $\det(A) = \det(B)$.

<u>dim</u> Si ha $\det(A) = \det(H^{-1} B H) = \det(H^{-1}) \det(B) \det(H)$ per il teorema di Binet. Dunque $\det(A) = \det(B)$ poiché $\det(H^{-1}) = \det(H)^{-1}$. $\square$

<u>Def</u>: Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo, si definisce $\det(\phi)$ come $\det(A)$ con $A$ una matrice associata a $\phi$ rispetto a qualche base di $V$.

Vediamo alcuni endomorfismi particolari:

Sia $V = U \oplus W$ uno spazio vett. con due sottospazi $U$ e $W$ tali che $U \cap W = \{0_V\}$ e $U + W = V$.

**Prop:** $\forall v \in V$, $\exists$ unici $u, w$ t.c. $u \in U, w \in W, u + w = v$

**Dim:** Sia $v \in V$, poiché $U + W = V$ allora esistono $u, w$ t.c. $u \in U, w \in W, u + w = v$.

Supponiamo $u_1 + w_1 = v = u_2 + w_2$ con $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$

~~Allora~~ allora $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0_V\}$. ■

Definiamo 2 endomorfismi, simmetria e proiezione parallelamente a $W$ rispetto a $U$ (sim. rispetto a $U$, proiez. su $U$)

$$\sigma = \sigma_{U,W} : V \longrightarrow V$$
$$v = u + w \longmapsto u - w$$

$$\pi = \pi_{U,W} : V \longrightarrow V$$
$$v = u + w \longmapsto u$$

Sono 2 applicazioni lineari, inoltre

$\sigma^2 = id_V$ e $\pi^2 = \pi$, $Ker(\sigma) = \{0\}$

$Ker(\pi) = W$

es. $V = \mathbb{R}^2$ $\quad U = \{ (x, y) \mid y = 0 \}$

$$W = \langle (0,1) \rangle$$

Allora $\quad \sigma_{U,W} : (x, y) \longmapsto (x, -y)$

$$\pi_{U,W} : (x, y) \longmapsto (x, 0)$$