Oss: Lo sviluppo di $\det A$ secondo la k-esima riga coincide con lo sviluppo di $\det(A^t)$ secondo la k-esima colonna.

Dunque $\det(A^t) = \det A$.

Vale il seguente risultato che non dimostreremo.

Prop: (Teorema di Binet):

Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Allora si ha

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Poiché $\det(I_n) = 1$, da questo risultato segue che $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Esempio:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

  Allora $AB = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(AB) = 5$, $\det(A) = -5$, $\det(B) = -1$.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, allora si ha

  $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad \det(A^{-1}) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{-2}{25} - \frac{3}{25} = \frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$$

23/04

Esercizio: Risolvere il sistema lineare $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Svolgimento: Sappiamo che A è invertibile, dunque l'unica soluzione del sistema è $A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cioè $\left(\frac{5}{21}, \frac{8}{21}, \frac{-3}{21}\right)$ (fare la verifica).

Sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali V, W. Fissando una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W abbiamo visto che a ϕ è associata la matrice $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$.

Poiché in V e W non ci sono in generale basi privilegiate, avremmo potuto fissare delle basi diverse $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ e $\mathcal{W}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$. La matrice associata a ϕ in questo caso è $A_{\mathcal{V}',\mathcal{W}',\phi} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Si pone naturalmente il seguente problema:

Che relazione c'è tra $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi}$ e $A_{\mathcal{V}',\mathcal{W}',\phi}$?

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ due basi di V. Allora la matrice

$A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V}$ associata all'endomorfismo identico di V

$\left(\text{cioè } id_V(v) = v \quad \forall v \in V \right)$ rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$

si dice matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{V}$ alla base $\mathcal{V}'$.

Prop: Si ha, con le definizioni date sopra,

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V}\, A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V} = I_n = A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V}\, A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V},$$

cioè $A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V} = \left(A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V}\right)^{-1}$.

dim.

Sappiamo che si ha

$$A_{\mathcal{V},\mathcal{V}',id_V}\, A_{\mathcal{V}',\mathcal{V},id_V} = A_{\mathcal{V}',\mathcal{V}',id_V \circ id_V}$$

ma

$$A_{\mathcal{V}',\mathcal{V}',id_V \circ id_V} = A_{\mathcal{V}',\mathcal{V}',id_V} = I_n \ . \ \square$$

Esercizio: Sia $\mathcal{E}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,2,0),(1,0,-1)\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$.
Determinare le matrici $A_{\mathcal{E},\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}}$ e $A_{\mathcal{A},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$ di cambiamento di base tra queste due basi.

Svolgimento: Si ha $A_{\mathcal{A},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Inoltre si ha $A_{\mathcal{E},\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}} = \left(A_{\mathcal{A},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

Calcolando l'inversa di $A_{\mathcal{A},\mathcal{E},id_{\mathbb{R}^3}}$ si ottiene

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{A},id_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

In generale vediamo che le matrici di cambiamento di base ci permettono di passare tra due matrici associate alla stessa applicazione lineare $\phi: V \to W$.

<u>Prop</u>: Sia $\phi: V \to W$ un'applicazione lineare, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{V}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ due basi di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$, $\mathcal{W}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$ due basi di W. Allora si ha

$$A_{\mathcal{V}', \mathcal{W}', \phi} = A_{\mathcal{W}, \mathcal{W}', id_W} \; A_{\mathcal{V}, \mathcal{W}, \phi} \; A_{\mathcal{V}', \mathcal{V}, id_V}.$$

<u>dim</u>. Si applica la proposizione sulla matrice associata ad una composizione di applicazioni lineari, notando che

$$\phi \circ id_V = \phi \quad e \quad id_W \circ \phi = \phi. \; \square$$

<u>Esercizio</u>: Sia $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(x, y, z) = (x+y, y+z)$.
Determinare la matrice associata a ϕ rispetto alle basi
$\mathcal{A} = \{(1,0,1), (1,2,0), (1,0,-1)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$.

<u>Svolgimento</u>: Siano $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$.

Si ha $A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \phi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sappiamo che si ha $A_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi} = A_{\mathcal{E}_2, \mathcal{B}, id_{\mathbb{R}^2}} \; A_{\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \phi} \; A_{\mathcal{A}, \mathcal{E}_3, id_{\mathbb{R}^3}}$

Inoltre si ha $A_{\mathcal{E}_2, \mathcal{B}, id_{\mathbb{R}^2}} = \left(A_{\mathcal{B}, \mathcal{E}_2, id_{\mathbb{R}^2}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Dunque si ha $A_{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.