Vediamo un altro metodo per calcolare il rango di una matrice.

Def: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, si dice minore di A una matrice ottenuta eliminando alcune righe e colonne

es
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- eliminando la prima riga, la seconda e quarta colonna, si ottiene il minore $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- eliminando la seconda riga e nessuna colonna si ottiene il minore $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Prop: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Allora il rango di A è uguale al massimo ordine s di un minore quadrato invertibile.

Dim: sia $p = rg(A)$, allora p è il max. numero di colonne di A lin. indip., e anche di colonne lin. indip. Scegliamo p righe lin. indip. e eliminiamo le altre, otteniamo un minore $A' \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ di A. Chiaramente $rg(A') = rg(A) = p$, quindi esistono p colonne di A' lin. indip., eliminiamo le altre, e otteniamo un minore quadrato $A'' \in M_{p,p}(\mathbb{R})$

$rg(A'') = p$, quindi A'' è un minore quadrato invertibile di ordine $p = rg(A)$. Quindi $p \leq s$.

Viceversa, supponiamo di avere un minore quadrato invertibile di A, di ordine s. Allora le righe (e le colonne) di questo minore saranno lin. indip, quindi le corrispondenti righe (e colonne) di A saranno anch'esse lin. indip., quindi $rg(A) = p \geq s$. ■

Come capire se una matrice quadrata è invertibile?

Definiamo una funzione sui coefficienti della matrice, la funzione determinante: sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

- <u>se $n=1$</u> $A = (a)$ $\det A = a$
- <u>se $n=2$</u> $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det A = ad - bc$

<u>Osservazione</u>: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

Infatti se $ad - bc = 0$ allora $d\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e anche $b\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi $rg(A) < 2$.

Viceversa se $rg(A) < 2$ allora $\exists (\lambda, \mu) \neq (0,0)$ t.c. $\lambda\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Supponiamo $\mu \neq 0$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} b = \lambda/\mu \cdot a \\ d = \lambda/\mu \cdot c \end{cases}$ $\Rightarrow$ $ad - bc = \frac{\lambda}{\mu}(ac) - \frac{\lambda}{\mu}(ac) = 0$.

Stessa cosa nel caso in cui sia $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} a = \mu/\lambda \cdot b \\ c = \frac{\mu}{\lambda} d \end{cases} \Rightarrow \quad ad - bc = \frac{\mu}{\lambda} bd - \frac{\mu}{\lambda} bd = 0$$

- Nel caso generale $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

Sia A_{ij} il minore di A ottenuto eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna di A.

$A_{ij} \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$

Allora si definisce

$$\det(A) = (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1}) + (-1)^{k+2} a_{k2} \det(A_{k2}) + \\ + (-1)^{k+3} a_{k3} \det(A_{k3}) + \ldots + (-1)^{k+n} a_{kn} \det(A_{kn}).$$

Questa espressione si chiama sviluppo del determinante secondo la k-esima riga.

Si dimostra che sviluppando secondo righe diverse si ottiene lo stesso risultato. Inoltre si può sviluppare il determinante anche secondo una colonna:

$$\det A = (-1)^{k+1} a_{1k} \det(A_{1k}) + (-1)^{k+2} a_{2k} \det(A_{2k}) + \ldots + (-1)^{k+n} a_{nk} \det(A_{nk}$$

Prop: Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Esempi: i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

- sviluppo secondo la prima riga:

$$\det A = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-4) - 1\cdot(2) + 3\cdot(1) = -7$$

- sviluppo secondo la terza colonna:

$$\det A = 3\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 10 = -7$$

ii) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Sviluppando secondo l'ultima riga

$$\det A = 3\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.2.\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = 3.2.(-5).4 = -120$$

$\boxed{\text{Ex}}$ Dimostrare che se $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice triangolare superiore, cioè se i termini sotto la diagonale principale sono nulli, allora il determinante di A è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

Cioè: se $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$, allora $\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdots a_{nn}$

//

Oss: In generale, se A è una matrice triangolare superiore (ossia se i termini sotto la diagonale principale sono nulli), $\det A$ è pari al prodotto degli elementi sulla diagonale principale. (Lo stesso vale per una matrice triangolare inferiore).

Prop: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. La matrice A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Dunque calcolando il determinante di una matrice quadrata è possibile stabilire se tale matrice è invertibile o meno.

Vediamo ora che il determinante ci permette anche di calcolare l'inversa di una matrice invertibile.

Def: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, definiremo la trasposta A^t di A, come la matrice $A^t \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ ottenuta da A scambiando le righe e le colonne.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, allora $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, allora $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Sia A_{ij} il minore di A ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Sia $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avente entrata i,j pari a $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ cioè $S = (s_{ij})$, con $s_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Sia $B = S^t$.

<u>Prop</u>: Con le definizioni date sopra vale

$$AB = BA = (\det A) \cdot I_n .$$

<u>dim</u>. L'entrata (i,i) della matrice AB coincide con lo sviluppo secondo la i-esima riga del determinante di A.
Per $i \neq j$, l'entrata (i,j) di AB coincide con lo sviluppo del determinante secondo la i-esima riga della matrice ottenuta da A sostituendo la i-esima riga di A anche al posto della j-esima.

Dunque tale determinante è nullo poiché la matrice ottenuta non è di rango massimo (due righe sono uguali). □

Questa proposizione ci fornisce un metodo di calcolo dell'inversa di A qualora A sia invertibile.

Infatti A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$, ed in tal caso si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot S^t .$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Costruiamo $S = (s_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$.

$s_{11} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 13$, $s_{12} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 4$, $s_{13} = \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -12$

e così via, usando la formula $s_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ si ottiene

$$S = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -12 \\ -7 & 14 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- trasponiamo

$$S^t = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 4 \\ 4 & 14 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- facciamo la verifica

$$A \cdot S^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -7 & 4 \\ 4 & 14 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

- Si conclude che

$$A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 13 & -7 & 4 \\ 4 & 14 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$