<u>Osservazione</u>: Abbiamo visto come scrivere un SL in forma matriciale con $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matrice dei coeff., $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ colonna delle incognite, e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ colonna dei termini noti:

$$\underset{\underset{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}{\in}}{A} \cdot \underset{\underset{\mathcal{M}_{n,1}}{\in}}{x} = b \in \mathcal{M}_{m,1}$$

Consideriamo adesso un'appl. lineare <u>biettiva</u> $f: V \to W$, ha senso considerare l'appl. inversa $f^{-1}: W \to V$, anche questa è lineare:

<u>Prop</u>: Se $f: V \to W$ è un'appl. lin. biettiva, allora anche $f^{-1}: W \to V$ è un'applicazione lineare.

<u>Dim</u>: siano w_1 e $w_2 \in W$. Consideriamo $f^{-1}(w_1 + w_2) \in V$ e $f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2) \in V$. Applichiamo f:

$f(f^{-1}(w_1 + w_2)) = w_1 + w_2$ e $f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)) =$

$= f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2)) = w_1 + w_2$. Quindi $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w$

[illegible] $\blacksquare$

Fissiamo ora delle basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ di V e W rispettivamente.

Vediamo che relazione c'è tra $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}$ e $A_{\mathcal{W},\mathcal{V},f^{-1}}$.

Def: Chiamiamo $I_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ossia, le entrate sulla diagonale principale sono 1, le altre 0.

$$I_n = (\delta_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Prop: Se $f: V \longrightarrow W$ è un'appl. lin. biettiva, se $A = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}$ e $B = A_{\mathcal{W},\mathcal{V},f^{-1}} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

allora $A \cdot B = I_n = B \cdot A$

Dim: Sappiamo che $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f} \cdot A_{\mathcal{W},\mathcal{V},f^{-1}} = A_{\mathcal{W},\mathcal{W},f\circ f^{-1}}$ e $f\circ f^{-1} = id_W$. Quindi se $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ base di W si ha $f \circ f^{-1}(w_i) = w_i$, dunque $A_{\mathcal{W},\mathcal{W},f\circ f^{-1}} = I_n$ ▨

Def: Una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ si dice <u>invertibile</u> se esiste una matrice $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ t.c. $A \cdot B = I_n$.

In questo caso vale anche $B \cdot A = I_n$, la matrice B si dice inversa di A. Essa è unica e si denota con A^{-1}.

Prop: Una matrice quadrata è invertibile se e solo se è la matrice associata ad un isomorfismo.

Prop: Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ un'appl. lineare tra due spazi vettoriali V e W tali che $\underline{\dim V = \dim W = n}$

Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) φ è invertibile

(ii) $rg(\varphi) = n$

(iii) φ è suriettiva

(iv) $Ker(\varphi) = \{0\}$

(v) φ è iniettiva

Dim: segue dalla formula delle dimensioni:

$$\dim V = \dim(Ker(\varphi)) + rg(\varphi)$$

(poiché $\dim V = \dim W$) ∎

Prop: Una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $rg(A) = n$

Dim: segue dalla proposizione sopra ∎

Prop: Una matrice quadrata di ordine n $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se ridotta a scala ha n pivot.

Dim: Il numero di pivot di una matrice ridotta in forma a scala è uguale al rango. $\blacksquare$

Prop: Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se si può ridurre tramite operazioni elementari sulle righe alla matrice identità I_n.

Esempio: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}]{\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}-2\mathrm{I}]{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}]{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\mathrm{II}]{\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Come calcolare la matrice inversa ??

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ scriviamo $(A \mid I_2)$ e riduciamola "a scala" riducendo A a I_2:

$$(A \mid I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I}]{\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II}-2\mathrm{I}]{\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-\mathrm{II}]{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Otteniamo $(I_2 \mid A^{-1})$, cioè $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

In generale, se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, per calcolare l'inversa (qualora esista) di A, si forma la matrice $(A \mid I_n) \in M_{n,2n}(\mathbb{R})$, si opera sulle righe di tale matrice riducendo A a I_n, e si ottiene la matrice $(I_n \mid A^{-1}) \in M_{n,2n}(\mathbb{R})$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcoliamo A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \mathrm{II}-2\,\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ //

$\boxed{\text{Ex}}$ Se una matrice quadrata $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è a scalini e ha rango n, allora la matrice A^{-1} è a scalini anch'essa.

(Suggerimento: $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}$ $\boxed{\text{a scalini}} \Rightarrow a_{ij} = 0$ se $i > j$; $\boxed{\text{scalini + rango } n} \Rightarrow a_{ii} \neq 0$)

Interpretazione delle operazioni sulle righe:

- Eseguire un'operazione elementare sulle righe di una matrice A equivale a moltiplicare ~~per~~ A per una matrice *invertibile* posta a sinistra di A:

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) scambio della prima e seconda riga:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) moltiplicazione della seconda riga per 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) sommare alla terza riga 2 volte la seconda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

- Questo è il motivo per cui il rango e il nucleo non cambiano (ma l'immagine sì)!

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto Ax$$

$$y \longmapsto By$$

$$x \longmapsto BAx$$

Se B è invertibile (quindi ψ è ISOMORFISMO)

$$rg(A) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Im}(\psi \circ \varphi)) = rg(BA)$$

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Ker}(BA)$$

- Questo è il motivo per cui funziona il metodo per calcolare l'inversa di A tramite $(A \mid I_n)$!

se $P_1, \dots, P_k$ sono le matrici corrispondenti alle operazioni elementari t.c. $P_k \cdot P_{k-1} \cdot \dots \cdot P_1 \cdot A = I_n$

Allora il prodotto di queste è l'inversa di A

$$P_k \cdot P_{k-1} \cdot \dots \cdot P_1 = A^{-1}, \quad \text{dunque}$$

$$P_k P_{k-1} \cdots P_1 (A \mid I_n) = (I_n \mid P_k P_{k-1} \cdots P_1) =$$

$$= (I_n \mid A^{-1}) \qquad ///$$