Capitolo VIII - Matrici

Consideriamo 2 applicazioni lineari

$$V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} Z$$ tra gli spazi

vettoriali V, W, Z. L'appl. composta

$\psi \circ \varphi$ è ancora un'applicazione lineare,

come descriverla?

Es. $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -x-y \\ y \\ 2x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} s \\ t \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2s+w \\ s-t \end{pmatrix}$$

Allora $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e $\psi\begin{pmatrix} s \\ t \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \\ w \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cioè $\varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

e $\psi\begin{pmatrix} s \\ t \\ w \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} s \\ t \\ w \end{pmatrix}$ con $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$\psi\left(\varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = B\cdot\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\left(x\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) =$$

$$= x\left(\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right) + y\left(\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) =$$

$C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, dove $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ è la matrice di $(\psi\circ\varphi): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nelle basi -

Quindi la prima colonna di C è $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, e la seconda colonna di C è $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ - $\quad C = \begin{pmatrix}0 & -2\\-1 & -2\end{pmatrix}$

Definiamo il prodotto $B.A$ come la matrice 2×2 in cui la prima colonna è data da $B.\begin{pmatrix}\text{prima}\\\text{colonna}\\\text{di } A\end{pmatrix}$ e la seconda colonna è $B.\begin{pmatrix}\text{seconda}\\\text{colonna}\\\text{di } A\end{pmatrix}$.

Si chiama prodotto righe per colonne e abbiamo quindi $C = B.A$ -

<u>Prop:</u> Siano V, W, Z degli $\mathbb{R}$-sp. vettoriali, e siano $\varphi: V \longrightarrow W$ e $\psi: W \longrightarrow Z$ due applicazioni lineari. Allora l'applicazione composta $\psi \circ \varphi: V \longrightarrow Z$, definita da $\psi \circ \varphi(v) = \psi(\varphi(v))$ $\forall v \in V$ è un'applicazione <u>lineare</u>.

<u>Dim:</u> $\boxed{EX}$

Fissiamo delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W, e $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_p\}$ di Z, e chiamiamo $A = A_{\mathcal{V}, \mathcal{W}, \varphi}$ la matrice associata a φ rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, $B = B_{\mathcal{W}, \mathcal{Z}, \psi}$ la matrice associata a ψ risp. alle basi $\mathcal{W}$ e $\mathcal{Z}$, e $C = A_{\mathcal{V}, \mathcal{Z}, \psi \circ \varphi}$ la matrice associata a $\psi \circ \varphi$ rispetto alle basi ~~M~~ $\mathcal{V}$ e $\mathcal{Z}$. In particolare abbiamo

$$A = (a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,m}} \in M_{p,m}(\mathbb{R})$$

e $$C = (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,p \\ k=1,\dots,n}} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

<u>Prop:</u> Con le notazioni sopra si ha

$$c_{ik} = (b_{i1} \ b_{i2} \ \dots \ b_{im}) \cdot \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk} \in \mathbb{R}$$

<u>Dim:</u> Poiché $C = A_{\mathcal{V},\mathcal{Z},\psi\circ\varphi}$ allora

$$(\psi \circ \varphi)(v_k) = \sum_{i=1}^{p} c_{ik} z_i$$ vettore le cui coord. in $\mathcal{Z}$ sono la k-esima colonna di C

Ma abbiamo $(\psi \circ \varphi)(v_k) = \psi(\varphi(v_k)) = \psi\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j\right) =$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \psi(w_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ij} z_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk} z_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}\right) z_i$$

Quindi $$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}$$ ∎

<u>Osservazione</u> l'elemento di C nella i-esima riga e k-esima colonna è dato dal prodotto della i-esima riga di B con la k-esima colonna di A. Ossia, come abbiamo visto prima, la k-esima colonna di C è data da

$$B \overbrace{\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix}}^{\boxed{\text{k-esima colonna di } A}}$$

. Questo è il "prodotto righe per colonne"

<u>Def</u>: Date 2 matrici $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, si definisce il "prodotto righe per colonne" $B \cdot A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ la matrice $B \cdot A = (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,p \\ k=1,\dots,n}}$ dove

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}, \quad \text{dove } B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,m}}$$

$$\text{e } A = (a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$$

<u>Osservazione</u>: La prop. dimostrata sopra si può riformulare dicendo che, fissate le basi $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ degli spazi V, W, Z, allora la matrice associata alla composizione delle appl. lineari $\varphi: V \to W$ e $\psi: W \to Z$ rispetto alle basi $\mathcal{V}, \mathcal{Z}$ è la matrice $B \cdot A$, dove $A = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\varphi}$ e $B = A_{\mathcal{W},\mathcal{Z},\psi}$.

Cioè $$A_{\mathcal{V},\mathcal{Z},\psi\circ\varphi} = A_{\mathcal{W},\mathcal{Z},\psi} \cdot A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\varphi}$$

<u>Attenzione</u>: il prodotto righe per colonne $B \cdot A$ si può fare solo quando il numero di colonne di B è uguale al numero di righe di A !!

es.

- $$\underset{\in \mathcal{M}_{2,3}}{\overset{B}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}} \underset{\in \mathcal{M}_{3,2}}{\overset{A}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}} = \underset{\in \mathcal{M}_{2,2}}{\overset{C}{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}}$$

- $$\underset{\in \mathcal{M}_{3,2}}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \underset{\in \mathcal{M}_{2,3}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{\in \mathcal{M}_{3,3}}{\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

- In generale $B \cdot A \neq A \cdot B$, anche se $n = m$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$