Foglio di esercizi 6

Esercizio 1 Al variare di k nei numeri reali si consideri il sistema lineare nelle incognite (x, y, z)

$$\begin{cases} x + y + z = 2k \\ (k-1)x + y - z = 1 \\ x + ky + z = k + 1 \end{cases}$$

(a) Studiare le soluzioni per $k = 0$.

(b) Determinare per quali valori di k si ha più di una soluzione e trovarle tutte.

(c) Trovare tutti i valori di k per cui si ha una sola soluzione e trovare tale soluzione.

Esercizio 2

(a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia $\ker f =< (2, 0, -1) >$ e $\mathrm{Im} f =< (2, 0, -1), (2, 1, 2) >$. Tale f è unica? Perché?

(b) Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(c) Per la f di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(1, 1, 1)$ e di $(0, -1, -3)$.

Esercizio 3 Al variare di $a \in \mathbb{R}$ siano dati gli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$, $f_a(x, y, z) = (ax, x + y + az, z)$.

(a) Dare la matrice di f_a rispetto alla base canonica.

(b) Per quali valori di a, f_a non è iniettivo? Per tali valori determinare una base del nucleo. Vi sono altri valori di a dove f_a ammette nucleo non nullo?

(c) Nel caso $a = 0$ determinare la matrice associata a f_a rispetto alla base $\{(1, 1, 0), (-2, -1, 0), (1, 0, -1)\}$.

Esercizio 4 Al variare di h nei numeri reali si consideri l'insieme delle applicazioni lineari $\varphi_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ rappresentate dalle matrici

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h & -1 \\ 0 & h-1 & 0 & 1-h \\ 1 & 3 & 2 & -h \end{pmatrix}$$

(a) Per ogni valore di h si determini la dimensione del nucleo e dell'immagine.

(b) Per ogni valore di h si determini Im e Ker.

(c) Determinare per ogni valore di h l'antimmagine del vettore $(1, h, 3)$ tramite φ_h.

Esercizio 5 Si consideri un endomorfismo f_k di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base canonia $\mathcal{E}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ sia:

$$A_k = \begin{pmatrix} k-3 & k & k^2-1 \\ 2 & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali valori di k la matrice A_k è iniettiva.

(b) Per quali valori di k la matrice A_k è suriettiva? Per quali è biettiva?

(c) Determinare per quali valori di k la controimmagine di $(1, -1, 1)$ è non vuota .

(d) Determinare la controimmagine di $(1, -1, 1)$ per i valori di k per i quali la controimmagine è infinita .

(e) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_k rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{E}_3$ nel codominio sia

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{E}_3,f_k} = \begin{pmatrix} 2k-3 & k & k^2-1 \\ k & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$