Esercizio: Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo di $V = \mathbb{R}^3$ avente come matrice associata alla base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ \lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quali λ tale endomorfismo è iniettivo

(b) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ determinare nucleo e immagine dell'endomorfismo (nella base $\mathcal{V}$)

(c) Determinare al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni del sistema lineare

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) Determinare per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema lineare $A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(e) Se $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'endomorfismo t.c. $A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi} = A_\lambda$ ~~determinare~~ e se $\mathcal{V} = \{\underset{v_1}{(1,1,1)}, \underset{v_2}{(2,0,1)}, \underset{v_3}{(2,1,0)}\}$ determinare, nella base canonica, gli insiemi $\varphi^{-1}(2v_1 + 2v_3)$

Svolgimento: chiamiamo $\varphi_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo, troviamo $\ker(\varphi_\lambda)$

$$A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ \lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{II} \\ \text{I} \\ \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda+1 & -1 \\ \lambda & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II}+\text{I} \\ \text{III}+\lambda\text{I} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -\lambda+2 & -3 \\ 0 & \lambda & -1-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \frac{1}{2}(\text{II}+\text{III}) \\ \text{III} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \\ 0 & \lambda & -1-2\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III}-\lambda\text{II} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{pmatrix}$$

Quindi: i) Se $\lambda^2-1 \neq 0$ cioè se $\lambda \neq \pm 1$ $\ker(\varphi_\lambda) = (0)$

ii) Se $\lambda^2-1 = 0$ $\begin{cases} y = (2+\lambda)z \\ x = y-2z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \ker(\varphi_\lambda) = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda \\ 2+\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

In effetti $A_\lambda \begin{pmatrix} \lambda \\ 2+\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix} + (2+\lambda)\begin{pmatrix} -\lambda+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-\lambda^2-\lambda+1 \\ 0 \\ \lambda^2-1 \end{pmatrix}$

Risposta a): φ_λ è iniettiva $\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$

Attenzione: nella base $\mathcal{V}$ il nucleo è generato da

$\lambda v_1 + (2+\lambda)v_2 + v_3$ quando $\lambda \in \{1,-1\}$

Risposta (b): • $\ker(\varphi_\lambda) = \{0\}$ se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$

$\ker(\varphi_\lambda) = \langle \lambda v_1 + (2+\lambda) v_2 + v_3 \rangle$ se $\lambda = \pm 1$

• $\mathrm{Im}(\varphi_\lambda) = ??$

• Se $\lambda \neq \pm 1$ $\quad \ker(\varphi_\lambda) = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}(\varphi_\lambda) = \mathbb{R}^3$

• Se $\lambda = -1$ o $\lambda = +1$ $\quad \lambda^2 - 1 = 0$

quindi $\mathrm{Im}(\varphi_\lambda) = \left\langle \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e

abbiamo visto una relaz.:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix} + (2+\lambda) \begin{pmatrix} -\lambda+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siccome sia λ, che $(2+\lambda)$, che 1 sono coeffic. $\neq 0$

possiamo prendere 2 qualsiasi dei vettori colonna per generare $\mathrm{Im}(\varphi_\lambda)$:

per es. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathrm{Im}(\varphi_\lambda)$ e sappiamo $\dim \mathrm{Im}(\varphi_\lambda) = 2$

Nella base v: $\mathrm{Im}(\varphi_\lambda) = \langle v_1 - v_2 + \lambda v_3, (1-\lambda) v_1 + v_2 \rangle$

(c) Quante sol. ha il sist. $A_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$??

- se $\lambda \neq \pm 1$ φ_λ è suriettiva, quindi il sistema ha soluzioni, inoltre $Ker(\varphi_\lambda) = \{0\}$ quindi la soluzione è unica.
- Se $\lambda \in \{\pm 1\}$ il sistema ha soluzioni se e solo se $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in Im(\varphi_\lambda)$, e in questo caso $\dim Ker(\varphi_\lambda) = 1$, quindi c'è un'infinità di soluzioni.

Visto che ~~dd~~ in seguito dovremo calcolare le soluzioni, facciamolo per ogni λ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\lambda+1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c} II \\ I \\ III \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda+1 & -1 & 2 \\ \lambda & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} I \\ II+I \\ III+\lambda I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\lambda+2 & -3 & 2 \\ 0 & \lambda & -1-2\lambda & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} I \\ \frac{1}{2}(II+III) \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -1-2\lambda & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} I \\ II \\ III-\lambda II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & 2-2\lambda \end{array}\right)$$

Il sistema equivalente è $\begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ y - (\lambda+2)z = 2 \\ (\lambda^2-1)z = 2(1-\lambda) \end{cases}$

Quindi se $\lambda = 1$ c'è un'infinità di soluz. e se $\lambda = -1$ non

Per rispondere a (d) calcoliamo le soluzioni:

i) Se $\lambda \neq \pm 1$ il sistema è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x = y - 2z \\ y = 2 + (\lambda+2)z \\ z = 2\dfrac{1-\lambda}{\lambda^2-1} \end{cases}$$

soluzione: $x = y - 2z = \frac{-2}{\lambda+1} + \frac{4}{\lambda+1} = \frac{2}{\lambda+1}$

$$\begin{cases} y = 2 + \dfrac{-2(\lambda+2)}{\lambda+1} = \dfrac{2\lambda+2-2\lambda-4}{\lambda+1} \\ z = 2\dfrac{1-\lambda}{\lambda^2-1} = \dfrac{-2}{\lambda+1} \end{cases}$$

l'unica soluzione è $\left(\frac{2}{\lambda+1}, \frac{-2}{\lambda+1}, \frac{-2}{\lambda+1}\right)$

ii) Se $\lambda = -1$ non ci sono soluzioni

iii) Se $\lambda = 1$ $\begin{cases} x = y - 2z = z + 2 \\ y = 3z + 2 \end{cases}$

l'insieme delle sol. è $\{(t+2, 3t+2, t)\} = (2,2,0) + \langle(1,3,1)\rangle$

$\varphi^{-1}(2v_1+2v_3) = \{xv_1 + yv_2 + zv_3 \,/\, A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\}$

(e) Chi è $\varphi^{-1}(2v_1 + 2v_3)$??

Nella base $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ è

$\lambda \neq \pm 1$ (i) $\left\{\frac{2}{\lambda+1}v_1 - \frac{2}{\lambda+1}v_2 - \frac{2}{\lambda+1}v_3\right\}$

$\lambda = -1$ (ii) $\emptyset$

$\lambda = 1$ (iii) $2v_1 + 2v_2 + \langle v_1 + 3v_2 + v_3 \rangle$

i) Se $\lambda \neq \pm 1$ $\varphi^{-1}(2v_1+2v_3) = \left\{\frac{2}{\lambda+1}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_1} - \frac{2}{\lambda+1}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_2} - \frac{2}{\lambda+1}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_3}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-6/\lambda+1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

coord. nella b. canon

f) ii) Se $\lambda = -1$ $\varphi^{-1}(2v_1+2v_3) = \emptyset$

iii) Se $\lambda = +1$ $\varphi^{-1}(2v_1+2v_3) = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$