(115)

Esercizio 1: Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base.

Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tc.

$$A = A_{\mathcal{V},\mathcal{V},\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Calcolare la dimensione e trovare una base per $\mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(Scrivere le coordinate dei vettori della base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ nella base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^3$)

ii) Determinare le coordinate dei vettori delle basi trovate di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ nella base canonica $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$, e scrivere delle equazioni cartesiane per $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ nelle coord. della base canonica, sapendo che

$v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,0)$, e $v_3 = (0,1,0)$

Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Considerare A come matrice di un endo ψ_A di $\mathbb{R}^3$ nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$

calcolare dimensione e base di $\ker(\psi_A)$ e $\mathrm{Im}(\psi_A)$

(coordinate nella ~~base~~ (v_1, v_2, v_3) di $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \dim \mathrm{Im}(\psi_A) = 2$$

$\longrightarrow \dim \ker(A) = 1$

$$\ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \ker A = \langle v_1 + 2v_2 - v_3 \rangle$$

Come calcolarlo altrimenti? :

coordinate x_1, x_2, x_3 in base $\{v_1, v_2, v_3\}$

$$\begin{cases} 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_1 = 4x_3 - 5x_3 = -x_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\, A = \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \langle v_2, 3v_1 + 2v_2 + v_3, 6v_1 + 5v_2 + 2v_3 \rangle$$

$$= \langle v_2, 3v_1 + 2v_2 + v_3 \rangle =$$

$$= \langle v_2, 3v_1 + v_3 \rangle$$

Equazione di $\mathrm{Im}\, A$ nelle coord. x_1, x_2, x_3 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, A$

$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$ con $\begin{cases} \beta = 0 \\ 3\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = -3\alpha \end{cases}$

$\boxed{x_1 - 3x_3 = 0}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, A$

e verificano l'equazione

Scrivere coordinate di una base di Ker(A) e una di Im(A) nella base canonica

$\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$:

sapendo $\operatorname{Ker} A = \langle v_1 + 2v_2 - v_3 \rangle$

e $\operatorname{Im} A = \langle v_2, 3v_1 + v_3 \rangle$

Supponiamo $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ nella b. can.

$$\longrightarrow \operatorname{Ker} A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \longleftarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Im} A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$ nella b. canonica

$3y - 4z = 0$

Esercizio 7.5.1 | Studiare al variare di $h \in \mathbb{R}$ le sol. del sist. in x, y, z (119)

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{cases} 2x + (h+1)y - z = 3 \\ 3x + (2h-1)y - z = 3 \\ hx + 2hz = -h^2 \\ x + (h-2)y = 0 \end{cases}$$

$$\text{V} \quad (1+h)x + (h-2)y + 2hz = -h$$

(Notiamo che: $\text{V} - \text{IV} - \text{III} \longrightarrow 0 = h^2 - h$ è un termine noto

Quindi il sistema ha soluzioni solo se $\underbrace{h^2 - h}_{h(h-1)} = 0$

Cioè $h = 1$ o $h = 0$)

Proseguiamo con il metodo dei Pivot di Gauss,

considerando h come un <u>numero reale fissato</u>.

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & h+1 & -1 & 3 \\ 3 & 2h-1 & -1 & 3 \\ h & 0 & 2h & -h^2 \\ 1 & h-2 & 0 & 0 \\ 1+h & h-2 & 2h & -h \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}-\mathrm{IV} \\ \mathrm{II}-3(\mathrm{I}-\mathrm{IV}) \\ \mathrm{III}-h(\mathrm{I}-\mathrm{IV}) \\ 2\mathrm{IV}-\mathrm{I} \\ \mathrm{V}-(h+1)(\mathrm{I}-\mathrm{IV}) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2h-10 & 2 & -6 \\ 0 & -3h & 3h & -h^2-3h \\ 0 & h-5 & 1 & -3 \\ 0 & h-2-3h-3 & 2h+h+1 & -h-3h-3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \frac{1}{2}\mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{V}+\mathrm{IV} \\ \mathrm{V}-\frac{1}{2}\mathrm{II} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & h-5 & 1 & -3 \\ 0 & -3h & 3h & -3h-h^2 \\ 0 & -15 & 3h+3 & -4h-9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ 3\mathrm{II}+\mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{III} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -15 & 3h+3 & -9-3h-h^2 \\ 0 & -15 & 3h+3 & -4h-9 \\ 0 & -3h & 3h & 3h-h^2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

pl. $\Leftrightarrow h^2 - h = 0$

$\Leftrightarrow h(h-1) = 0$

$\Leftrightarrow h=1$ or $h=0$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\frac{h}{5}\mathrm{I} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -15 & 3h+3 & -h^2-3h-9 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{9+3h+h^2-4h-9} \\ 0 & 0 & 3h-\frac{3h^2}{5}-\frac{3}{5}h & 3h-h^2+\frac{h}{5}(9-3h-h^2) \end{array}\right)$$

$\boxed{h=0}$
$$\begin{cases} \cancel{x} + 3y - z = 3 \\ -15y + 3z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 3y + z \\ z = 5y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cancel{3} - 3y + 5y - \cancel{3} \\ z = 5y - 3 \end{cases}$$

$$T_0 = \{ (2t, t, 5t-3) \,/\, t \in \mathbb{R} \} =$$

$$= (0, 0, -3) + \langle (2, 1, 5) \rangle$$

$\boxed{h=1}$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -15 & 6 & -13 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-5\text{III}]{\text{I} \;\; \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -9 & -23 \end{array}\right)$$

$\underline{1 \text{ sol.}}$
$$\begin{cases} x = -3y + z + 3 = -17 + \frac{23}{9} + 3 = -12 + 5/9 \\ y = 3z - 2 = \frac{23}{3} - 2 = \frac{17}{3} \\ z = 23/9 \end{cases}$$