Esempi di appl. lin. e matrici

1) Sia $V = \mathbb{R}^2$ con base canonica $\mathcal{E}^2 = \{\overset{e_1}{(1,0)}, \overset{e_2}{(0,1)}\}$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (3x+4y, -y)$$

$$\varphi(1,0) = (3,0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(0,1) = (4,-1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = A_{\mathcal{E}^2, \mathcal{E}^2, \varphi} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y \\ -y \end{pmatrix}$$

2) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E}^3 = \{\underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)}\}$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (y-z, -x+z, x-y)$$

$e_1 = (1,0,0) \quad \varphi(e_1) = (0,-1,1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_2 = (0,1,0) \quad \varphi(e_2) = (1,0,-1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$e_3 = (0,0,1) \quad \varphi(e_3) = (-1,1,0) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A = A_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^3, \varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y-z \\ -x+z \\ x-y \end{pmatrix}$$

Def: i) Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è una matrice, il rango di A, o "rango per colonne" di A, è il massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti (considerate come vettori $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ con m coordinate). Si denota rg(A) o rk(A).

ii) Se $\varphi: V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali, il rango di φ è la dimensione dello sp. vett. $\mathrm{Im}(\varphi)$. Si denota con $rg(\varphi)$ o $rk(\varphi)$.

Osservazione: i) sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ con $A = (a_{ij})$, cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ allora

$$rg(A) = \dim \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle$$

ii) Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ un'appl. lineare, e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W.

Allora $rg(\varphi) = rg(A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\varphi})$.

Abbiamo visto che un'appl. lineare $\varphi: V \longrightarrow W$ si "esprime in coordinate" (fissate delle basi) come

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Il nucleo quindi si scriverà come il sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$$\ker(\varphi) = \left\{ v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \;/\; A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

e i coefficienti delle varie equazioni che definiscono il nucleo nelle coordinate sono disposti secondo le righe di A.

- $$\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ w = y_1 w_1 + \ldots + y_m w_m \;/\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ per qualche } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ w = y_1 w_1 + \ldots + y_m w_m \;/\; \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle \right\}$$

- <u>Teor. delle dimensioni</u>: la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$ è $\boxed{n - rg(A)}$

- Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ un'appl. lineare,
  sia $w_0 \in W$ un vettore del codominio,
  come calcolare $\varphi^{-1}(\{w_0\})$?

In particolare: come capire se $\varphi^{-1}(\{w_0\}) \neq \emptyset$?
Come trovare tutti i $v \in V$ tali che $\varphi(v) = w_0$?

Fissiamo una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V ed una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W.

Scriviamo $w_0 = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_m w_m$, allora se $A = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\varphi}$ è la matrice associata a φ, dobbiamo trovare $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ tali che $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, cioè risolvere (se ci sono soluzioni) il seguente sistema lineare (non omogeneo):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

<u>Obiettivo</u>: risolvere il sistema utilizzando la matrice $(A|b)$

CAPITOLO VII - SISTEMI LINEARI

__Def:__ i) Un sistema di equazioni lineari, o sistema lineare, di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali è una lista di m equazioni (non omog.) in $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ii) La matrice (incompleta) associata al sistema sopra è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

la colonna dei termini noti è $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

e la matrice completa è la matrice

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$$

Vogliamo capire:

- quando un sistema ammette soluzioni.
- com'è fatto l'insieme di tutte le sue soluzioni
- un metodo per ottenere le soluzioni

Dato un sistema lineare con matrice completa

$$(A \mid b) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$$

Consideriamo l'applicazione lineare $\varphi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

che ha matrice associata A nelle basi canoniche $\mathcal{E}^n$ e $\mathcal{E}^m$:

$$\varphi_A : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$, e la colonna $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Trovare le soluzioni del sistema è la stessa cosa

che determinare l'insieme $\varphi_A^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\right\}\right) = \varphi_A^{-1}(\{b\})$

Abbiamo già mostrato che: (i) $\varphi_A^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset \iff b \in \mathrm{Im}(\varphi_A)$

e (ii) se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\varphi_A(v) = b$

allora $\varphi_A^{-1}(\{b\}) = v + \mathrm{Ker}(\varphi_A)$

Scriviamo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ vettori colonna, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ 111

il sistema con matrice completa $(A \mid b)$

si scrive allora $Ax = b$

e possiamo riassumere quanto scritto sopra nel

Teorema (di Rouché-Capelli): dato un sistema lineare $Ax = b$, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ vettori colonna (e $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sono le incognite), esso ammette soluzione se e solo se $rg(A \mid b) = rg(A)$.

In questo caso, se $v_0 \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione particolare, cioè se $Av_0 = b$, allora tutte le soluzioni ~~saranno~~ sono

$$v_0 + Ker(\varphi_A) = \{v_0 + v' \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v' = 0\},$$

e questo insieme è un sottospazio se e solo se $b = 0$, cioè se il sistema lineare è omogeneo.

Dim: Segue da quanto osservato sopra: l'insieme delle soluzioni è $\varphi_A^{-1}(\{b\})$, ed è non vuoto se e solo se $b \in Im(\varphi_A)$, quindi ~~se~~ $b \in \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\rangle$

//

$\boxed{\text{EX}}$ Mostrare che l'ins. delle soluzioni è un sottospazio vettoriale se e solo se il sistema è omogeneo

Come trovare le soluzioni?

Come abbiamo fatto nel caso omogeneo: bisogna ridurre il sistema ad uno equivalente "a scala". Le operazioni che abbiamo fatto sulle equazioni di un sistema si traducono in "operazioni sulle righe di $(A|b)$".

Vediamo con un esempio:

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

matrice completa $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{III} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

corrisponde al sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$ $\lightning$

Non ha soluzioni

In effetti abbiamo già calcolato

$$rg(A) = \dim \operatorname{Im}(\varphi_A) = 2$$

poiché il rango non cambia eseguendo operazioni sulle righe, $rg(A|b) = rg\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

per vedere che il rango di questa matrice è 3, scriviamo un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ come comb. lin. di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ -b+c \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c = z \\ -b+z = y \\ a+z = x \end{cases} \qquad \begin{cases} a = x-z \\ b = z-y \\ c = z \end{cases}$$

<u>esiste</u>.

prendiamo invece $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(\varphi_A)$, p.es. $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{III} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Otteniamo un sistema equivalente :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ y - z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{sostituz.}} \begin{cases} x = y+2 = z+4 \\ y = z+2 \end{cases}$$

z variabile libera → parametro $t \in \mathbb{R}$

soluzioni: $\{(t+4, t+2, t) \,/\, t \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(4,2,0) + (t,t,t) \,/\, t \in \mathbb{R}\} =$

$= (4,2,0) + \langle (1,1,1) \rangle = (4,2,0) + \mathrm{Ker}(\varphi_A)$

(114 b)

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -26 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 11x_4 = -10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 5 & 7 & -26 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 & 11 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{II} \\ \mathrm{I}-2\mathrm{II} \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 6 & 18 & -36 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \frac{1}{3}\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad rg(A) = rg(A|b) = 2$$

$$rg(A) = 2 \Rightarrow \dim Ker(A) = 4 - 2 = 2$$

Soluzioni:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 + x_4 - 4 \\ \quad\; = -2x_2 + 4x_4 + 2 \\ x_3 = -3x_4 - 6 \end{cases}$$

Variabili nei gradini espresse in funzione delle altre

$$S = \{(-2x_2 + 4x_4 + 2, x_2, -3x_4 - 6, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(-2\alpha + 4\beta + 2, \alpha, -3\beta - 6, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{\alpha(-2,1,0,0) + \beta(4,0,-3,1) + (2,0,-6,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 10x_2 - 10x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & -10 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} - 3\,\mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & -10 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -10 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & -10 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

No soluzioni

$$sg(A|b) = 3 \neq sg(A) = 2$$