01-04-2015

Abbiamo visto alcune appl. lin. $\mathbb{R}^n \longrightarrow V$ ottenute scegliendo k-vettori $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$.

p.es. • $v_1 = (1,2) \in \mathbb{R}^2 = V$ $v_2 = (0,1) \in V$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto x v_1 + y v_2 = x(1,2) + y(0,1) = (x, 2x+y)$$

• viceversa se prendiamo un'appl. lin. qualsiasi

p.es. $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$(x,y) \longmapsto (3x+4y, -y)$$

chiamiamo $v_1 = \varphi(1,0) = (3,0)$
$v_2 = \varphi(0,1) = (4,-1)$

Allora $\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è un'appl. costruita come sopra.
$$(x,y) \longmapsto x v_1 + y v_2$$

Vedremo che questa costruzione si può fare in generale. (cioè per ogni appl. lineare $\varphi: V \longrightarrow W$).

Prop: Sia $\varphi: V \to W$ un'appl. lineare tra sp. vett. V e W.
Sia $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \subseteq V$ il sottosp. generato da $u_1, \dots, u_k$.

Allora $\varphi(U) = \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle$.

Dim: $\varphi(U) = \{ \varphi(u) \in W \,/\, u \in U \} =$

$= \{ \varphi(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k) \,/\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ \lambda_1 \varphi(u_1) + \dots + \lambda_k \varphi(u_k) \,/\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \} = \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k) \rangle$ ▨

Osservazione: In generale se $\{u_1, \dots, u_k\}$ è una base di U, non è detto che $\{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)\}$ sia una base di $\varphi(U)$: sarà un insieme di generatori di $\varphi(U)$, ma potrebbero essere linearmente dipendenti.

Esempio: Sia $\varphi: V \to W$ un'applicazione non iniettiva. Sia $U = \mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0_V\}$. Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base di U.

poiché $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \dots = \varphi(u_k) = 0$ $\{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)\}$ non è una base

Ex: Mostrare che se $\varphi: V \to W$ è un'appl. lin. iniettiva, e se $\{v_1, \dots, v_k\}$ è un insieme linearmente indipendente, allora $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)\}$ è lin. indipendente.

<u>Osservazione</u>: dall'ultima proposizione segue che se $\varphi: V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare si ha $\dim V \geq \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.

<u>Prop</u> (Teorema delle dimensioni):
Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali V e W, con V finitamente generato.
Allora si ha $\dim V = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$

<u>Dim</u>: sia $k = \dim(\ker(\varphi))$ e $n = \dim V$.
Completiamo una base $\{u_1, \dots, u_k\}$ di $\ker(\varphi)$ ad una base di V $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$.
Allora, poiché $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \dots = \varphi(u_k) = 0$ si ha

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \langle \varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k), \varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n) \rangle = \langle \varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n) \rangle$$

Mostriamo che $\varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_{k+n})$ sono linearmente INDIPENDENTI, e otterremo il risultato

$$\dim \mathrm{Im}(\varphi) = n - k$$

Supponiamo $\alpha_{k+1}\varphi(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n\varphi(v_n) = 0_W$,

quindi si ha $\varphi(\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0_W$,

cioè $\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Poiché $\{u_1, \dots, u_k\}$ è una base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ allora

$\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$, quindi

$-\beta_1 u_1 + \dots + (-\beta_k)u_k + \alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0$

e poiché $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ è base di V

allora $\beta_1 = \dots = \beta_k = \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ ■

Esercizio: Sia $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'appl. lin. definita da $(x,y,z) \longmapsto (y-z, -x+z, x-y)$

Si determini una base di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ e una di $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Svolgimento:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (y-z, -x+z, x-y) = (0,0,0) \}$$

risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y-z=0 \\ -x+z=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \text{per sost.} \quad \begin{cases} y=z \\ x=z \\ x=z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = \{ (t,t,t) / t \in \mathbb{R} \} = \{ t(1,1,1) / t \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \langle (1,1,1) \rangle \quad \text{una base è } \{(1,1,1)\}$$

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \langle \varphi(1,0,0), \varphi(0,1,0), \varphi(0,0,1) \rangle =$$

$$= \langle (0,-1,1), (1,0,-1), (-1,1,0) \rangle$$

Dalla formula abbiamo: $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 3 - \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 2$

poiché $(0,-1,1)+(1,0,-1)+(-1,1,0) = (0,0,0)$

allora $\{(1,0,-1), (-1,1,0)\}$ è una base di $\mathrm{Im}(\varphi)$

Abbiamo visto che se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, l'immagine di un'applicazione lineare $\varphi : V \longrightarrow W$ è determinata dalle immagini dei vettori $v_1, \dots, v_n$:

$$Im(\varphi) = \langle \varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n) \rangle .$$

Come determinare l'applicazione $\varphi : V \longrightarrow W$ se conosciamo $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n) \in W$?

<u>Osservazione</u>: i) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è ins. <u>generatore</u> di V e se $\varphi : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare, Allora φ è univocamente determinata da $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$, infatti $\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \dots + \lambda_n \varphi(v_n)$.

ii) Se scegliamo dei valori "a caso" $w_1, \dots, w_n \in W$ non è detto che esista un'appl. lineare $\varphi : V \longrightarrow W$ tale che $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2, \dots, \varphi(v_n) = w_n$. Infatti non è detto (li abbiamo scelti a caso) che se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$ anche $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0_W$.

iii) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è anche linearmente INDIP., cioè se è una base, allora comunque scegliamo $w_1, \dots, w_n \in W$ possiamo considerare l'appl. lineare

$\varphi : V \longrightarrow W$ definita da $\varphi(v_1) = w_1, \dots, \varphi(v_n) = w_n$, cioè

$\varphi(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n$.

Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base, ogni vettore $v \in V$ si scrive in maniera unica come comb. lineare $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, quindi l'appl. lineare φ è ben definita.

Vediamo adesso una maniera "semplice" di costruire tutte le possibili applicazioni lineari tra due spazi vettoriali V e W, una volta fissate delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W. Questo ci permetterà di studiarle meglio.

Sia V uno sp. vett. con base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\dim V = n$

Sia W uno sp. vett. con base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$, $\dim W = m$

Sia $\varphi : V \longrightarrow W$ un' appl. lineare. Scriviamo i vettori $\varphi(v_j)$ come combinazioni lineari dei w_i

$$\varphi(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m$$

$$\varphi(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\varphi(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m$$

Se vogliamo calcolare l'applicazione φ in un vettore $v \in V$ con coordinate $\lambda_1, \dots, \lambda_n$: $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

abbiamo

$$\left.\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \\ &= (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n}) w_1 + \\ &+ (\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n}) w_2 + \dots \\ &\dots + (\lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \dots + \lambda_n a_{mn}) w_m \end{aligned}\right\} (*)$$

Def: Siano V e W due spazi vettoriali. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V, e sia $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Sia $\varphi : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Con le notazioni sopra, la matrice

$$A = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\varphi} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

coordinate di $\varphi(v_1)$ nella base $\mathcal{W}$

coordinate di $\varphi(v_2)$ nella base $\mathcal{W}$

coordinate di $\varphi(v_n)$ nella base $\mathcal{W}$

è detta matrice associata all'applicazione lineare $\varphi : V \longrightarrow W$ rispetto alla base $\mathcal{V}$ di V e $\mathcal{W}$ di W.

Osservazione: ciò detto sopra mostra che c'è una biezione tra l'insieme $\mathrm{Lin}(V,W) = \{\varphi : V \longrightarrow W \,/\, \varphi \text{ applicaz. lineare}\}$ e l'insieme $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici $m \times n$ a coeff. reali, data da

$$\underset{\mathrm{Lin}(V,W)}{\underset{\cap}{\phi}} \longmapsto \underset{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\phi}}}$$

//

Osservazione: abbiamo visto che la j-esima colonna della matrice $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},\varphi}$ è data dalle coordinate del vettore $\varphi(v_j) \in W$ nella base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$.

Conviene identificare, avendo fissato una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W, i vettori $v \in V$ con la colonna delle ~~loro~~ coordinate: $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

e i vettori $w \in W$: $w = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

In questo modo l'eguaglianza (**) diventa:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \varphi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

Esempi: Consideriamo gli spazi $V = \mathbb{R}^n$ con le loro basi canoniche $\{e_1, \dots, e_n\} = \mathcal{E}^n$ $\quad e_j = (0, \dots, 0, \overset{j\text{-esimo posto}}{1}, 0, \dots, 0)$

1) l'appl. vista sopra $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (x, 2x + y)$$

$e_1 = (1,0) \qquad \varphi(e_1) = (1,2) = v_1 = 1(1,0) + 2(0,1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$e_2 = (0,1) \qquad \varphi(e_2) = (0,1) = v_2 = 0(1,0) + 1(0,1) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A = A_{\mathcal{E}^2, \mathcal{E}^2, \varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + y \end{pmatrix}$$