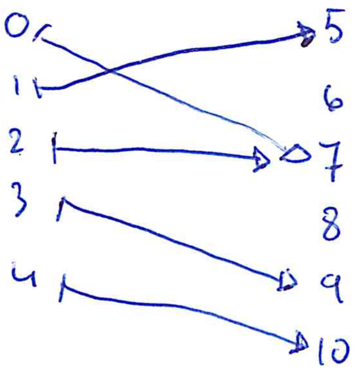
Capitolo VI — Applicazioni Lineari

• **Applicazioni tra insiemi:** Siano A e B due insiemi, un applicazione ϕ da A a B, denotata $\phi : A \to B$, o $A \xrightarrow{\phi} B$, è una legge che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B.

Es. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$\phi : A \to B$ la seguente applicazione



$\phi(0) = 7$
$\phi(1) = 5$
$\phi(2) = 7$
$\phi(3) = 9$
$\phi(4) = 10$

Def: i) Sia $\phi : A \to B$ un'applicazione. L'insieme A si dice il dominio di ϕ, e l'insieme B il codominio.

ii) ϕ si dice iniettiva se manda elementi diversi di A in elementi diversi di B, cioè se: $x, y \in A$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

iii) ϕ si dice suriettiva se ogni elemento di B è immagine di un elemento di A, cioè se: $\forall\, y \in B\ \exists\, x \in A \mid \phi(x) = y$.

iv) ϕ si dice biettiva se è iniettiva e suriettiva.

(es.) L'applicazione ϕ definita sopra <u>non</u> è iniettiva né suriett.

<u>Def.</u>: i) Sia $\phi: A \to B$ un'applicazione. Sia $a \in A$ un elemento. L'elemento $b \in B$, $b = \phi(a)$, è detto immagine di a tramite ϕ.

ii) Sia $\phi: A \to B$ un'appl., sia $A' \subseteq A$ un sottoinsieme. Il sottoinsieme di B formato dalle immagini di elementi di A' tramite ϕ si chiama "immagine di A' tramite ϕ" e si denota con $\phi(A') = \{b \in B \,/\, \exists\, a \in A' \text{ t.c. } \phi(a) = b\}$

iii) L'<u>immagine di ϕ</u> è il sottoinsieme $\phi(A) \subseteq B$.

(es.) Sia $\phi: \{0,1,2,3,4\} \longrightarrow \{5,6,7,8,9,10\}$ l'applicazione definita sopra. $\phi(\{0,2,4\}) = \{7,10\}$.

$$\phi(A) = \phi(\{0,1,2,3,4\}) = \{5,7,9,10\} \subsetneq B$$

<u>Osservazione</u>: Sia $\phi: A \to B$ un'applicazione.

$$\phi \text{ è suriettiva} \iff \phi(A) = B.$$

<u>Def.</u>: Sia $\phi: A \to B$ un'applicazione. Sia $B' \subseteq B$ un sottoinsieme. Si definisce l'<u>antimmagine</u> o <u>controimmagine</u> o <u>immagine inversa</u> di B' tramite ϕ l'insieme degli elementi di A la cui immagine è un elemento di B' e si denota con:

$$\phi^{-1}(B') = \{a \in A \,/\, \phi(a) \in B'\}.$$

ϕ definita sopra, $\phi^{-1}(\{7,8,10\}) = \{0,2,4\}$

$\phi^{-1}(\{6,8\}) = \emptyset$ = insieme vuoto.

Osservazione: Sia ϕ un'applicazione, $\phi: A \to B$. Allora

ϕ iniettiva $\iff \forall\, b \in \phi(A)$, $\phi^{-1}(\{b\})$ contiene un solo elem

---

Abbiamo visto che, dato un insieme di k vettori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V, si può definire un'applicazione:

$\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$

$\Phi: \mathbb{R}^k \longrightarrow V$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \longmapsto \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$

E abbiamo osservato che:

i) Φ è suriettiva $\iff$ $\{v_1, \dots v_k\}$ è un ins. generatore per V

ii) Φ è iniettiva $\iff$ $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente

$\iff \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = 0$ se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

$\iff \Phi^{-1}(0_V) = \{(0, \dots, 0)\}$

Cerchiamo ora di capire come generalizzare queste proprietà ad alcuni tipi di applicazioni $\varphi: V \to W$ con W e V spazi vettoriali _

Def: Siano V e W due $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Un'applicazione $\varphi: V \longrightarrow W$ si dice lineare se:

i) $\forall\, v_1, v_2 \in V$, $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

ii) $\forall\, v \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$

Oss i) φ è lineare $\Longleftrightarrow$ $\forall\, v_1, v_2 \in V$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\varphi(\lambda v_1 + \mu v_2) =$
$= \lambda \varphi(v_1) + \mu \varphi(v_2)$

ii) Se $\varphi: V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare allora

- $\varphi(0_V) = 0_W$
- $\varphi(-v) = -\varphi(v)$

Vediamo come si comportano le appl. lineari rispetto sottospazi

Prop: Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ un'appl. lin. tra sp. vett. V e W.
Sia $V' \subseteq V$ un sottosp. vett., allora $\varphi(V') \subseteq W$ è un sottospazio.

Dim: criterio per $\varphi(V') \subseteq W$: siano $w_1, w_2 \in W$,
allora esistono $v_1, v_2 \in V'$ tali che $\varphi(v_1) = w_1$ e $\varphi(v_2) = w_2$.
Allora per linearità di φ: $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = w_1 + w_2 \in \varphi(V'$
Analogamente. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ ~~allora~~ $\alpha w_1 = \alpha \varphi(v_1) = \varphi(\alpha v_1) \in \varphi($

<u>Prop:</u> Sia $\phi: V \longrightarrow W$ un'appl. lineare tra 2 sp. vett.

Sia $W' \subseteq W$ un sottosp. vett. - Allora $\phi^{-1}(W') \subseteq V$ è un sottosp. vett

<u>Dim:</u> Siano $v_1, v_2 \in \phi^{-1}(W')$, cioè $\phi(v_1), \phi(v_2) \in W'$.

Allora $\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) \in W'$, quindi $v_1 + v_2 \in \phi^{-1}(W')$.

Anche $\phi(\alpha v_1) = \alpha\phi(v_1) \in W'$, quindi anche $\alpha v_1 \in \phi^{-1}(W')$,

e $\phi^{-1}(W') \subseteq V$ è un sottosp. vett. per il criterio -

Es.

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

f non è lineare, infatti $f(0) \neq 0$

- $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x+3y, -y)$ è lineare, infatti:

le coordinate del vettore $f(x,y)$ sono funzioni lineari omogenee delle coordinate del vettore (x,y). Quindi per es.

$$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+3y_1+3y_2, -y_1-y_2) =$$

$$= (x_1+3y_1, -y_1) + (x_2+3y_2, -y_2) = f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) \ \ldots$$

- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$ <u>non è lineare</u>: $f(\pi/4 + \pi/4) = f(\pi/2) = 1$

$$f(\pi/4) + f(\pi/4) = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 = \sqrt{2} \ \#$$

- $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y,z,w) \longmapsto x - y + 2z + 3w$ è un'appl. lineare -

Def: Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ un'appl. lineare tra spazi vettoriali

(i) Il sottospazio $\varphi^{-1}(\{0_W\}) \subseteq V$ si dice nucleo dell'appl. lineare φ, e si denota $Ker(\varphi)$.

(ii) Il sottospazio vett. $\varphi(V) \subseteq W$ si chiama immagine dell'appl. lineare φ, e si denota $Im(\varphi)$

Prop: Sia $\varphi: V \to W$ un'appl. lineare. Allora

$$\varphi \text{ iniettiva} \iff Ker(\varphi) = \{0_V\}$$

Dim: ($\Rightarrow$) Se φ è iniettiva e $v \in V$ $v \neq 0_V$ allora $\varphi(v) \neq \varphi(0_V) = 0_W$, quindi $Ker(\varphi) = \{0_V\}$

($\Leftarrow$) Supponiamo $Ker(\varphi) = \{0_V\}$, $v_1, v_2 \in V$ t.c. $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$

allora $\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0_W$.

quindi $v_1 - v_2 \in Ker(\varphi) = \{0_V\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2$ ∎

Prop: Sia $\varphi: V \longrightarrow W$ un appl. lineare. Sia $w \in W$.

Allora i) se $w \notin Im(\varphi)$ si ha $\varphi^{-1}(\{w\}) = \emptyset$

ii) se $w \in Im(\varphi)$ si ha $\varphi^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset$, e

se $v \in \varphi^{-1}(\{w\})$ è un vettore di V t.c. $\varphi(v) = w$ allora

si ha $\varphi^{-1}(\{w\}) = v + Ker(\varphi) = \{v' \in V \,/\, v' = v + v'',\ v'' \in Ker(\varphi)\}$

Dim: per definizione di $Im(\varphi)$ si ha $\varphi^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in Im(\varphi)$

Mostriamo che se $\varphi(v) = w$ allora $\varphi^{-1}(\{w\}) = v + Ker(\varphi)$

$(\supseteq)$: sia $v' = v + v''$ con $v'' \in Ker(\varphi)$

allora $\varphi(v') = \varphi(v) + \varphi(v'') = w + 0_W = w$, quindi $v' \in \varphi^{-1}(\{w\})$

$(\subseteq)$: Sia $v' \in \varphi^{-1}(\{w\})$, allora chiamiamo $v'' = v' - v$,

si ha: $\varphi(v'') = \varphi(v') - \varphi(v) = w - w = 0_W$.

quindi $v'' \in Ker(\varphi)$ e $v' = v + v'' \in v + Ker(\varphi)$. $\blacksquare$