# Foglio di esercizi 4

**Esercizio 1** In $\mathbb{R}^5$, trovare una base del sottospazio $W$ definito da

$$W =< (1,0,1,0,1),(2,-1,1,1,-1),(0,-1,-1,1,-3),(0,1,-1,2,3),(2,-3,3,-3,-7) > .$$

Trovare un sottospazio $W^{'}$ tale che $W \oplus W^{'} = \mathbb{R}^5$.

**Esercizio 2** In $\mathbb{R}^6$, trovare una base del sottospazio $U$ definito da

$$U = \{(x,y,z,u,v,w) \in \mathbb{R}^6 \ \mid \ \begin{cases} x+y-z-u+v+w=0 \\ 2x+y-z-2u+2w=0 \\ x+2z-u-v+w=0 \\ 3x+y+3z-3u+v+w=0 \end{cases} \}.$$

Completare tale base ad una base di $\mathbb{R}^6$.

**Esercizio 3** In $\mathbb{R}^4$, trovare delle equazioni cartesiane per il sottospazio

$$V =< (1,2,1,0),(1,1,2,1),(-1,1,-4,-3) > .$$

Calcolare dim$V$.
Trovare un sottospazio $V^{'}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $V \leq V^{'}$ e dim$V^{'}$ = dim$V+1$; determinare delle equazioni caresiane di $V^{'}$.

**Esercizio 4** In $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ , trovare una base del sottospazio $W$ definito da

$$W =< \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > .$$

Trovare un sottospazio $W^{'}$ tale che $W \oplus W^{'} = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 5** In $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, trovare una base del sottospazio $U$ definito da

$$U = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \ \mid \ \begin{cases} -a_{11}-a_{12}+a_{13}+2a_{21}+a_{23}=0 \\ -3a_{11}+a_{12}+a_{13}+3a_{21}+a_{22}+3a_{23}=0 \\ a_{11}-a_{12}-a_{13}+a_{21}-a_{22}-a_{23}=0 \\ 2a_{11}-2a_{13}-a_{21}-a_{22}-2a_{23}=0 \end{cases} \}.$$

Completare tale base ad una base di $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

**Esercizio 6** In $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, trovare delle equazioni cartesiane per il sottospazio

$$V =< \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > .$$

Calcolare dim$V$.
Trovare un sottospazio $V^{'}$ di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $V \leq V^{'}$ e dim$V^{'}$ = dim$V+1$; determinare delle equazioni caresiane di $V^{'}$.

**Esercizio 7** In $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ , trovare delle equazioni cartesiane nelle variabili $a,b,c,d$ che siano verificate se e solo se il polinomio $ax^3+bx^2+cx+d$ appartiene al sottospazio

$$V =< -x^3+4x^2+x+3, x^3+2x^2+x+1, 2x^3+x^2+x > .$$

Calcolare dim$V$.
Trovare un sottospazio $V^{'}$ di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$ tale che $V \leq V^{'}$ e dim$V^{'}$ = dim$V+1$. Determinare delle equazioni lineari omogenee nelle variabili $a,b,c,d$ che definiscano $V^{'}$.