25.3.15

Sottosp. Definiti da eq. Cartesiane

Abbiamo visto in $\mathbb{R}^n$:

$$W = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \Big/ \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

è un sottospazio. In effetti basta usare il criterio:

se $v = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $w = (y_1,\dots,y_n)$ verificano tutte quelle equazioni, anche $v+w = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$ le verifica e anche $\alpha v = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ le verifica, per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$

Se V è uno sp. vett. (fin. generato) e $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base, si possono definire in maniera analoga dei sottosp. tramite eq. cartesiane per le coordinate nella base di V, per es.

$$W = \left\{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in V \Big/ \begin{matrix} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + \dots + a_{mn}\lambda_n = 0 \end{matrix} \right\} \subset V$$

Come sopra W è un sottospazio di V.

Esempi:

a) $U = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \Big/ \begin{matrix} x + y + 3z - t = 0 \\ x + 4y + 2z + t = 0 \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$ è un sottosp.

b) $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \Big/ \begin{matrix} x_{11} + 3x_{21} - 5x_{22} = 0 \\ x_{11} - x_{12} + 2x_{13} + x_{23} = 0 \\ x_{13} + 4x_{22} - x_{23} = 0 \end{matrix} \right\} \subset M_{2,3}(\mathbb{R})$

c) $U = \left\{ p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]^{\leq 4} \Big/ \begin{matrix} a_3 + a_2 + a_0 = 0 \\ a_3 - a_1 + 2a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 0 \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$

Attenzione: anche se la variabile a_4 non compare nelle equazioni, queste vanno pensate nelle variabili a_0, a_1, a_2, a_3, a_4.

EX Trovare una base per ognuno dei sottospazi in (i), (ii) e (iii).

Svolgimento: (a) $U: \begin{cases} x+y+3z-t=0 \\ x+4y+2z+t=0 \end{cases}$

troviamo le soluzioni del sistema così:

aggiungiamo alla seconda equazione (-1) volte la prima

$\begin{cases} x+y+3z-t=0 \\ 3y-z+2t=0 \end{cases}$ | esplicitiamo la y, poi sostituiamo nella prima equazione ed esplicitiamo la x

$\begin{cases} x=-\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}t \\ y=\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}t \end{cases}$ abbiamo x, y in funzione di z e t,

quindi $U:=\{(-\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}t, \frac{1}{3}z-\frac{2}{3}t, z, t) / z,t\in\mathbb{R}\}=$

$=\{z(-\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0)+t(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1) / z,t\in\mathbb{R}\}=$

$\langle(-\frac{10}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0), (\frac{5}{3}, \frac{-2}{3}, 0, 1)\rangle$

Dopo il primo passo abbiamo ottenuto un sistema lineare equivalente "a scaletta", questi si risolvono facilmente esplicitando la prima variabile di ogni equazione e sostituendo nelle altre eq. (a partire dal basso).

Altre sol. per sostituz. $\begin{cases} x=-y-9y-6t+t \\ z=3y+2t \end{cases}$ $\begin{cases} x=-10y-5t \\ z=3y+2t \end{cases}$ $\langle(-10, 1, 3, 0), (-5, 0, 2, 1)\rangle$

Un sistema lineare omogeneo si può ridurre ad un sistema equivalente "a scala" tramite le 3 operazioni:

(i) moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo.

(ii) riordinare le equazioni del sistema

(iii) sommare ad un'equazione del sistema un multiplo di un'altra eq.

Un sistema "a scala": $\forall$ (in ogni equazione,) la prima variabile che compare nell'equaz. è più a destra della variabile che compare per prima nell'equazione precedente.

Risolviamo il sistema per (b) riducendolo in forma a "scala"

$$\begin{cases} x_{11} + 3x_{21} - 5x_{22} = 0 \\ x_{11} - x_{12} + 2x_{13} + x_{23} = 0 \\ x_{13} + 4x_{22} - x_{23} = 0 \end{cases}$$

scriviamo le variabili "in ordine":

$$\begin{cases} x_{11} + 3x_{21} - 5x_{22} = 0 \\ x_{11} - x_{12} + 2x_{13} + x_{23} = 0 \\ x_{13} + 4x_{22} - x_{23} = 0 \end{cases}$$

$(-1)(\mathrm{II} - \mathrm{I})$

$$\begin{cases} x_{11} + 3x_{21} - 5x_{22} = 0 \\ x_{12} - 2x_{13} + 3x_{21} - 5x_{22} + x_{23} = 0 \\ x_{13} + 4x_{22} - x_{23} = 0 \end{cases}$$

sostituzione

$$\begin{cases} x_{11} = 3x_{21} - 5x_{22} \\ x_{12} = (-8x_{22} + 2x_{23}) - 3x_{21} + 5x_{22} - x_{23} = -3x_{21} - 3x_{22} + x_{23} \\ x_{13} = -4x_{22} + x_{23} \end{cases}$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_{21} - 5x_{22} & -3x_{21} - 3x_{22} + x_{23} & -4x_{22} + x_{23} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \Big/ x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\bar{U} = \left\{ x_{21}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_{22}\begin{pmatrix} -5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x_{23}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x_{21}, x_{22}, x_{23} \in \mathbb{R}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \longleftarrow \underline{\underline{\text{base}}}$$

(c)

$$\begin{cases} a_3 + a_2 + a_0 = 0 \\ a_3 - a_1 + 2a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{I}-\mathrm{II}-\mathrm{III} \end{array} \begin{cases} a_3 + 0 - a_1 + 2a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ -2a_0 = 0 \end{cases}$$

$\underline{\text{sostit.}}$

$$\begin{cases} a_3 = a_1 \\ a_2 = -a_1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

$\underline{\text{Attenzione}}$: c'era anche a_4x^4 in $V = \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$!!!

$$U = \{ a_4x^4 + a_1x^3 - a_1x^2 + a_1x \;/\; a_1, a_4 \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ a_4(x^4) + a_1(x^3 - x^2 + x) \} = \langle x^4, x^3 - x^2 + x \rangle \subset \mathbb{R}[x]^{\leq 4}$$

$\underline{\text{Riassumendo}}$: Si usano le 3 operazioni per ridurre il sistema a scala, poi si sostituiscono le variabili "della scala".

$\longrightarrow$ Si ottiene una $\underline{\text{base}}$ per U (quindi descrizione tramite generatori

Come passare da generatori a eq. cartesiane ?

~~Ese~~ Due modi : 1) Si scrivono le equazioni parametriche e si ottengono equazioni sostituendo i parametri

2) Si scrive un'equazione generale e si vede che condizioni si devono imporre ai parametri dell'equazione perché i generatori la soddisfino.

Esempio : Trovare eq. cartesiane per $U = \langle (1,2,-1,0),(2,-1,0,-1) \rangle \subset \mathbb{R}$

metodo 1 : scriviamo $U = \{ t(1,2,-1,0) + s(2,-1,0,-1) / t,s \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ (t+2s, 2t-s, -t, -s) / t,s \in \mathbb{R}^4 \}$

eq. param.
$$\begin{cases} x_1 = t+2s \\ x_2 = 2t-s \\ x_3 = -t \\ x_4 = -s \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + x_4 \\ t = -x_3 \\ s = -x_4 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Eq. Cartesiane
$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

metodo 2: scriviamo un'equazione generale:

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 = 0$$

questa è un'equazione per $\bar{U}$ se e solo se è verificata da tutti i generatori di $\bar{U}$. Quindi se e solo se

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 2a - b - d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = a + 2b \\ d = 2a - b \end{cases}$$

le soluzioni di questo nuovo sistema forniranno tutte le possibili equazioni soddisfatte dai vettori di $\bar{U}$.

I coefficienti di queste equazioni saranno quindi

$$(a,b,c,d) = (a, b, a+2b, 2a-b) = a(1,0,1,2) + b(0,1,2,-1)$$

Otteniamo 2 equazioni $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

[Parentesi: i due metodi non danno sempre le stesse equazioni! p. es. avremmo potuto risolvere con

$$\begin{cases} a = -2b + c \\ d = 2a - b = -4b + 2c - b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2b + c \\ d = -5b + 2c \end{cases}$$

$$(a,b,c,d) = (-2b+c, b, c, -5b+2c) = b(-2,1,0,-5) + c(1,0,1,2)$$

otteniamo 2 equazioni $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 5x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

Ex da Libro 5.5.2

$\mathbb{R}^4$
$\cup$

Sia $S = \langle (1,1,1,1), (1,0,-1,2), (-1,0,-1,1), (1,2,1,3) \rangle$

i) dim S

ii) trovare se esiste $T \subseteq \mathbb{R}^4$ sottosp. / $S \oplus T = \mathbb{R}^4$

iii) —— $W \subseteq \mathbb{R}^4$ sottosp. / $W \neq \{0\}$, $W \oplus S \neq \mathbb{R}^4$

iv) —— $V \subset \mathbb{R}^4$ sottosp. / $V + S = \mathbb{R}^4$, $V \cap S \neq \{0\}$

v) trovare basi e eq. cart. di S, T, W, V

(80)

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta-\gamma+\delta=0 \\ \alpha+2\delta=0 \\ \alpha-\beta-\gamma+\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma+3\delta=0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{r} \mathrm{II} \\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \alpha+2\delta=0 \\ 2\beta=0 \\ \alpha-\beta-\gamma+\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma+3\delta=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \frac{1}{2}\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}+\frac{1}{2}\mathrm{II} \\ \mathrm{IV} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \alpha+2\delta=0 \\ \beta=0 \\ -\gamma-\delta=0 \\ \alpha+2\beta+\gamma+3\delta=0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I}-2\mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \alpha+2\delta=0 \\ \beta=0 \\ +\gamma+\delta=0 \\ 0=0 \end{array}\right.$$

esplicitiamo le variabili "a scala" $\left\{\begin{array}{l} \alpha=-2\delta \\ \beta=0 \\ \gamma=-\delta \end{array}\right.$

cond. di dip. lineare $-2(1,1,1,1)+(-1)(-1,0,-1,1)+(1,2,1,3)=0$

$\Rightarrow (1,2,1,3)=2(1,1,1,1)+(-1,0,-1,1)$

$\Rightarrow S=\langle(1,1,1,1),(1,0,-1,2),(-1,0,-1,1)\rangle$