23/3/15

Riprendiamo l'ultimo esercizio:

Abbiamo trovato delle basi dei sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$\bar{U} = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,0) \rangle$

$W = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,1) \rangle$

$\bar{U} \cap \bar{W} = \langle (1,1,0,1) \rangle$

Inoltre: $\bar{U} + W = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,1) \rangle$

sono generatori ma non linearmente indipendenti:

$(1,0,0,1) + (0,1,0,0) + (-1)(1,0,0,0) + (-1)(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$

Quindi possiamo togliere uno qualsiasi dei quattro generatori e l'insieme sarà ancora generatore di $U+W$, quindi $\dim(U+W) \leq$

Inoltre abbiamo $U \subseteq U+W$, $W \subseteq U+W$

Quindi $2 = \dim \bar{U} \leq \dim(U+W) \leq 3$, ma allora

$\dim(U+W) = 3$ poiché ~~[illegible]~~ altrimenti si avrebbe $\bar{U} = U+W$ e $W = U+W$, ma $U \neq W$.

Quindi togliendo uno qualsiasi dei 4 generatori scritti sopra si ottiene una base.

Completiamo le basi come richiesto:

(iii) Completare la base di W ad una di $U+W$:

la base di W trovata è $\{(1,0,0,0),(0,1,0,1)\}$, aggiungiamo il vettore $(0,1,0,0)$ e otteniamo $\{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,1,0,0)\}$, per il motivo di cui sopra, questa è la base ricercata.

(iv) Completare la base trovata di U ad una di $\mathbb{R}^4$:

la base di U è $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$, completiamola prima ad una base di $U+W$: aggiungiamo $(1,0,0,0)$

$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,0,0,1)\}$ è base di $U+W$, in particolare sono 3 vettori lin. indipendenti in $\mathbb{R}^4$, se aggiungiamo un vetore $v \in \mathbb{R}^4$ t.c. $v \notin U+W$, allora v unito ai 3 vettori sopra formerà una base di $\mathbb{R}^4$:

p.es. sia $v=(0,0,1,0)$, allora

$v \notin \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,0,0,1) \rangle$ poiché tutti e 3 i generatori hanno la terza coordinata nulla.

Quindi per Prop 3 $\{(0,0,1,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,0,0,1)\}$ è lin. INDIP., quindi è una base di $\mathbb{R}^4$. ☒

Osserv.: Nell'esercizio precedente

$\dim U = 2 \quad \dim W = 2 \quad \dim(U \cap W) = 1 \quad \dim(U+W) = 3$

dunque valeva l'uguaglianza: $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$

E' vero in generale

Teor (Formula di Grassmann):

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e U e W due sottospazi di V.

Allora vale l'uguaglianza: $\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)$

Dim: sia $\dim U \cap W = k$, $\dim U = r \geq k$, $\dim W = s \geq k$,

mostriamo che $\dim(U+W) = r+s-k$:

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $U \cap W$, completiamola ad una

base $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r\}$ di U e ad una base

$\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_s\}$ di W.

Allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_s\}$ genera

$U+W$, ed è formato da $r+s-k$ ~~elementi~~ vettori.

Mostriamo che sono linearmente indipendenti:

Sia $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_r u_r + \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_s w_s = 0$

una comb. lin. che dà il vett. nullo.

Mostriamo che $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_r = \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_s = 0$

Abbiamo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots \beta_r u_r = -\gamma_{k+1} w_{k+1} - \dots - \gamma_s w_s$

Dunque $-\gamma_{k+1} w_{k+1} - \dots - \gamma_s w_s \in U \cap W$, e poiché

$\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di $U \cap W$ abbiamo per

opportuni $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k$: $\alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_k v_k = -\gamma_{k+1} w_{k+1} - \dots - \gamma_s w_s$,

cioè $\alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_k v_k + \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_s w_s = 0_V$,

e poiché $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_s\}$ è lin. indipendente,

segue che $\alpha'_1 = \dots = \alpha'_k = \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_s = 0 \in \mathbb{R}$.

Quindi nella prima comb. lineare si ottiene:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_r u_r = 0$ e poiché

anche $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r\}$ è un ins. linear. INDIP.

allora $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_r = 0$ $\blacksquare$

Def: Siano U e W due sottosp. vett. di uno spazio vett. V. Si dice che la somma di U e W è diretta, o che U e W sono "in somma diretta" se $U \cap W = \{0_V\}$. In tal caso la somma di U e W si denota con $U \oplus W$.

Osservazione: Siano U e W due sottospazi in somma diretta, allora si ha $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$, e una base di $U \oplus W$ si ottiene unendo una base di U con una di W.

Esercizio: Sia $U = \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$

Trovare un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ t.c. si abbia $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Svolgimento: dalla formula di Grassmann si deve avere

$4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim U + \dim W = 2 + \dim W$, poiché $(1,1,1,1)$ e $(1,-1,1,-1)$ sono linearmente indipendenti.

Dunque $\dim W = 2$. Dall'osservazione segue che se $\{w_1, w_2\}$ è una base di W, allora

$\{(1,1,1,1), (1,-1,1,-1), w_1, w_2\}$ deve essere una base di $\mathbb{R}^4$.

Viceversa, per qualsiasi base $\{(1,1,1,1), (+1,-1,+1,-1), w_1, w_2\}$, ottenuta completando la base di U ad una base di $\mathbb{R}^4$, si avrà che $\{w_1, w_2\}$ è base di un sottosp. W t.c. $U \oplus W = \mathbb{R}^4$.

Completiamo quindi $\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$, scegliendo 2 opportuni vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$

$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

Poiché $\bar{U} = \{\alpha(1,1,1,1)+\beta(1,-1,1,-1) / \alpha,\beta\in\mathbb{R}\} =$

$= \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta / \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ vediamo che

$(1,0,0,0)\notin \bar{U}$.

Poiché $\langle(1,0,0,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle = \{(\gamma+\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta)/\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$

allora $(0,1,0,0)\notin\langle(1,0,0,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$.

Quindi $\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$, e $W = \langle(1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$ è un sottosp. tale che $\bar{U}\oplus W = \mathbb{R}^4$.

<u>Osservazione</u>: esistono infiniti sottospazi W tali che $\mathbb{R}^4 = \bar{U}\oplus\bar{W}$.

Ad esempio anche $\langle(0,1,0,0),(0,0,1,0)\rangle$ andava bene.

Descrizione di Sottospazi Vettoriali

Abbiamo visto vari modi in cui si può descrivere un sottospazio:

- tramite generatori: $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle \subset V$
- tramite equazioni parametriche:

$$W = \{ \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_s w_s \ / \ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R} \} \subset V$$

scrivendo le coordinate in una base

p. es. $W = \{ (3s, s+t, 2t, 3s+4t) \ / \ s,t \in \mathbb{R} \} \subset V$

- tramite equazioni cartesiane:

p. es. $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \ / \ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$

Osservazione: quando scriviamo (x_1, x_2, x_3, x_4), $x_i \in \mathbb{R}$,

vogliamo dire
- il vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$
- oppure il vettore $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 \in V$ se abbiamo fissato una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di V.

In quest'ultimo caso (x_1, x_2, x_3, x_4) sono le coordinate di v nella base scelta.

In particolare, il vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ ha coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) nella base $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^4$.

Per passare da una descrizione ad un'altra, bisogna "risolvere i sistemi".

<u>Ad es.</u> $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{matrix} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ 6x_2 = -x_3 + 2x_4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

<u>eq. param.</u> $\begin{cases} x_1 = -2s + t \\ x_2 = -\frac{1}{6}s + \frac{1}{3}t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$

$$\to \quad W = \left\{ (-2s + t, -\tfrac{1}{6}s + \tfrac{1}{3}t, s, t) \;/\; s, t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle (-2, -\tfrac{1}{6}, 1, 0), (1, \tfrac{1}{3}, 0, 1) \right\rangle$$

$$= \left\langle (3, 1, 0, 3), (0, 1, 2, 4) \right\rangle$$