Se $\{v_1,\dots,v_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V allora ogni vettore $v\in V$ si scrive come combinazione lineare dei vettori $v_1,\dots,v_n$ in maniera <u>unica</u>.

<u>Def:</u> Sia V uno spazio vettoriale, $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base di V. Sia $v\in V$ un vettore, allora i coefficienti della combinazione lineare $v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$ che dà v si chiamano "coordinate di v" rispetto alla base $\{v_1,\dots,v_n\}$

Es. le coordinate della matrice $\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ sono $(1,2,-1,0)$.

Le coordinate di $\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ rispetto alla base
$\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ sono $(1,-1,1,-1)$.

Le coordinate di un vettore <u>dipendono</u> dalla base scelta.

<u>Fissata una base</u>

$$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{è biettiva, con inversa } \Psi$$

$$v \longmapsto (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \quad \text{coordinate di } v \text{ nella base } \{v_1,\dots,v_n\}$$

$$\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \longmapsto \lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n$$

Esercizio: sia $V = \mathbb{R}^4$, mostrare che $\{(1,1,1,1), (0,-1,2,1), (0,0,1,-1), (0,0,0,2)\}$ è una base di V, e trovare le coordinate del vettore $v = (1,1,-1,3)$ rispetto a questa base.

Svolgimento: risolvendo il sistema ottenuto scrivendo $\lambda_1(1,1,1,1) + \lambda_2(0,-1,2,1) + \lambda_3(0,0,1,-1) + \lambda_4(0,0,0,2) = (0,0,0,0)$ otteniamo che i 4 vettori sono linearmente indipendenti, poiché $\dim V = 4$ essi formano una base.

Cerchiamo le coordinate del vettore v:

$a(1,1,1,1) + b(0,-1,2,1) + c(0,0,1,-1) + d(0,0,0,2) = (1,1,-1,3)$:

$$\begin{cases} a + 0b + 0 \cdot c + 0d = 1 \\ a - b + 0 \cdot c + 0 \cdot d = 1 \\ a + 2b + c + 0 \cdot d = -1 \\ a + b - c + 2d = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -2 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il vettore v ha coordinate $(1,0,-2,0)$ nella base data.

Osservazione: Il sistema è stato risolto per sostituzione di una variabile dopo l'altra.

In questo caso: semplice!

Esercizio: in $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$V = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,0), (2,-3,0,2), (-1,2,0,-1) \rangle$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \ x_2 - x_4 = 0, \ x_3 = 0\}$$

i) Trovare una base di V e una base di W;

ii) Trovare una base di $W \cap V$ e una base di $W + V$;

iii) Completare la base trovata di W ad una base di $V + W$;

iv) Completare la base di $W \cap V$ trovata ad una base di V;

v) Completare la base trovata di $V + W$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento: (i) troviamo una base di V seguendo 2 metodi:

(A) Partiamo dai generatori di V ed eliminiamone alcuni finché non troviamo una base:

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (2,-3,0,2), (-1,2,0,-1)\}$ è un insieme linearmente INDIPENDENTE ??

$$\alpha(1,0,0,1) + \beta(0,1,0,0) + \gamma(2,-3,0,2) + \delta(-1,2,0,-1) = (0,0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\gamma - \delta = 0 \\ \beta - 3\gamma + 2\delta = 0 \\ \cancel{0 = 0} \\ \cancel{\alpha + 2\gamma - \delta = 0} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta = \alpha + 2\gamma \\ \beta - 3\gamma + 2\alpha + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \delta = \alpha + 2\gamma \\ \beta = -2\alpha - \gamma \end{cases}$$

Ad esempio una sol. è $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 1 \end{cases}$

Quindi possiamo eliminare un generatore, ad esempio

$(-1,2,0,1) = -1(1,0,0,1) + 2(0,1,0,0)$

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (2,-3,0,2)\}$ è Lin. Indip. ??

No: troviamo $(2,-3,0,2) = 2(1,0,0,1) + (-3)(0,1,0,0)$.

Eliminiamo anche $(2,-3,0,2)$.

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0)\}$ è lin. INDIP. ??

Sì: sono 2 vettori non multipli uno dell'altro.

$V = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,0) \rangle$ questa è una BASE di V.

Altro metodo (B): aggiungiamo i vettori quando lin. indip. con quelli precedenti!

iniziamo con il primo $(1,0,0,1)$ è $\neq 0$ prendiamolo

$\{(1,0,0,1)\}$, ~~aggiungo~~ il secondo dà un ins. lin. INDIP.?

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0)\}$ è lin. INDIP.? Sì, lo teniamo.

il terzo: $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (2,-3,0,2)\}$ è lin. INDIP.?

No, eliminiamo il terzo vettore.

il quarto vettore $(-1,2,0,-1)$:

$\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(-1,2,0,-1)\}$ è lin. INDIP.??

NO, quindi eliminiamo anche il quarto vettore.

$\Rightarrow \{(1,0,0,1),(0,1,0,0)\}$ è una base di V.

Troviamo adesso una base di

$$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_2 - x_4 = 0 \quad x_3 = 0\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, 0, x_2) \,/\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x_1(1,0,0,0) + x_2(0,1,0,1) \,/\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \langle (1,0,0,0),(0,1,0,1) \rangle$$

$\{(1,0,0,0),(0,1,0,1)\}$ è lin. INDIP.?

Sì, quindi è una base di W.

ii) $V \cap W = \{ \lambda(1,0,0,1) + \mu(0,1,0,0) \in W \} =$

$= \{ (\lambda, \mu, 0, \lambda) \,/\, \begin{smallmatrix} \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ \mu - \lambda = 0 \end{smallmatrix} \} = \{ (\lambda, \lambda, 0, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R} \} =$

$= \langle (1,1,0,1) \rangle$

$\{(1,1,0,1)\}$ è base di $V \cap W$.

$V + W = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,1) \rangle$

Sono linearmente indipendenti ?

No ! $(1,0,0,1) + (0,1,0,0) - (1,0,0,0) - (0,1,0,1) = (0,0,0,0)$

Eliminiamo uno dei 4 vettori :

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ sono linearmente INDIPENDENTI ? Sì, quindi sono una base di $V+W$.

Altro metodo : sappiamo che $V \subseteq V+W \subseteq \mathbb{R}^4$

quindi $2 \le \dim(V+W) \le 4$.

inoltre i 4 generatori sono linearmente DIPENDENTI, Quindi $2 \leq \dim(V+W) \leq 3$.

Poiché $V \subseteq V+W$ e $W \subseteq V+W$,

e poiché $\dim V = \dim W = 2$,

se fosse $\dim(V+W) = 2$ si avrebbe

$V = V+W = W$, ma $V \neq W$ quindi

deve essere $\dim(V+W) = 3$, e i

3 generatori $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0)\}$

devono essere linearmente INDIPENDENTI.

Completamento delle basi: come fare?

Abbiamo le basi dei sottospazi:

$V = \langle (1,0,0,1),(0,1,0,0) \rangle$ $W = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,1) \rangle$

$V \cap W = \langle (1,1,0,1) \rangle$ $V+W = \langle (1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0) \rangle$

Completare la base di W ad una di $V+W$:

troviamo un vettore di $V+W$ che non appartiene

a W, cerchiamolo tra i generatori di $V+W$.

$(1,0,0,0) \in W$? Sì, cerchiamo tra gli altri.

$(0,1,0,0) \in W$? No, prendiamo questo.

$\{(1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,1,0,0)\}$ è lin. indip.

$\dim(V+W) = 3$, quindi questo è una base, ed è un completamento della base di W.

Seguiamo lo stesso metodo per le altre basi:

$W \cap V = \langle (1,1,0,1) \rangle$

$(1,0,0,1) \in V \quad (1,0,0,1) \notin (W \cap V)$

$V = \langle (1,1,0,1), (1,0,0,1) \rangle$ base, completamento.

$V+W = \langle (1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0) \rangle$

<u>Generatori di $\mathbb{R}^4$</u>: $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

Cerchiamone uno che non sia in $V+W$:

$(1,0,0,0) \in V+W$, $(0,1,0,0) \in V+W$, $(0,0,1,0) \notin V+W$

la base $\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,0,1,0)\}$ di $\mathbb{R}^4$ è un completamento della base di $V+W$ ///