Svolgimento: mostriamo che generano

Sia $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d \in V$

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 (x^3 + x^2) + \lambda_3 (x^2 + 1) + \lambda_4 x = P(x) \iff$$

$$\lambda_2 x^3 + (\lambda_2 + \lambda_3) x^2 + \lambda_4 x + (\lambda_1 + \lambda_3)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_2 = a \\ \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ \lambda_4 = c \\ \lambda_1 + \lambda_3 = d \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = d - a \\ \lambda_2 = + a \\ \lambda_3 = b - a \\ \lambda_4 = c \end{cases}$$

In particolare $P(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 0 \quad \lambda_4 = 0$

Vediamo adesso alcune proprietà di insiemi di generatori, insiemi lin. indip., basi:

vogliamo mostrare: i) $\{v_1, \dots, v_k\}$ generatori $\xrightarrow{\text{togliamo}}$ $\{v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_s}\}$ base

ii) $\{w_1, \dots, w_r\}$ lin. indip. $\xrightarrow{\text{aggiungiamo}}$ $\{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_{r+h}\}$ base

iii) tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori

iv) dimensione di V; formula Grassmann: $\boxed{\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)}$

Si può fare in tutti gli sp. vett. finitamente generati.

Cioè, vogliamo dimostrare i seguenti:

Prop 1: Sia $I = \{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di generatori di un $\mathbb{R}$-spazio vett. V. Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti esiste un sottoinsieme proprio di I di generatori di V.

Prop 2 (viceversa di Prop 1): Sia $\underset{\{v_1,\dots,v_k\}}{\overset{\|}{I}}$ un insieme di generatori di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti, qualsiasi sottoinsieme proprio di I non genera V.

Prop 3: Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di vettori linearmente indipendente di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V. Sia $u \in V$. L'insieme $\{u, v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente se e solo se $u \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Corollario 1: Sia V uno sp. vett., sia $B \subset V$ un insieme finito di vettori. Allora le seguenti sono equivalenti:

(i) B è una base di V

(ii) B è un insieme generatore minimale

(iii) B è un insieme linearmente indipendente massimale

<u>Teor 1</u> (Lemma dello Scambio): in un $\mathbb{R}$-sp. vett. V,

sia $I = \{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di vettori linearmente indipendente, e sia $G = \{w_1, \dots, w_p\}$ un insieme di generatori di V.

Allora si ha $k \leq p$, ossia la cardinalità di un insieme generatore è sempre maggiore o uguale alla cardinalità di un insieme linearmente indipendente.

<u>Corollario 2</u>: Tutte le basi di uno spazio vettoriale V (finitamente generato) hanno la stessa cardinalità.

Dimostrazioni

Prop 1: Osserviamo che se $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$ è una comb. lin. dei vettori $v_1, \dots, v_k$ allora

$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_k, u \rangle$ infatti:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k + \beta u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta\lambda_1) v_1 + \dots + (\alpha_k + \beta\lambda_k) v_k .$$

Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono lin. dipendenti allora $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli t.c. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

supponiamo che $\lambda_k \neq 0$ allora $\lambda_k v_k = -\lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_{k-1} v_{k-1}$

$\Rightarrow$ $v_k = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right) v_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_k}\right) v_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) v_{k-1}$ è comb. lin. di $v_1, \dots, v_{k-1}$

Quindi: $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ $\blacksquare$

Prop 2: viceversa supponiamo che un sottoinsieme proprio generi V, per esempio $\langle v_1, \dots, v_{k-1} \rangle = V$, allora v_k è comb. lin. degli altri

$v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}$. Quindi la comb. lin.

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + (-1) v_k = 0$ è comb. lin. non nulla

che dà il vettore nullo. $\blacksquare$

<u>Prop 3:</u> sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ linearmente indipendente.

Come sopra, se $u \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ allora

$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ quindi $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + (-1)u = 0$

$\Rightarrow$ $\{u, v_1, \dots, v_k\}$ è lin. <u>dipendente</u>.

(Quindi abbiamo dimostrato $\{u, v_1, \dots, v_k\}$ lin. INDIP. $\Rightarrow u \notin \langle v_1, \dots, v_k \rangle$)

($\Leftarrow$): mostriamo che se $\{u, v_1, \dots, v_k\}$ è lin. DIPENDENTE

allora $u \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$:

abbiamo una rel. di <u>dip. lineare</u> $\alpha u + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

se $\alpha = 0$ abbiamo anche $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

ma poiché $v_1, \dots, v_k$ sono lin. INDIP. per ipotesi

allora anche $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$, e non è possibile.

Quindi $\alpha \neq 0$, ma allora $u = \left(-\frac{\lambda_1}{\alpha}\right) v_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\alpha}\right) v_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\alpha}\right) v_k \in \langle v_1, \dots, v_k \rangle$

<u>Corollario 1:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): Se B è base è ins. generatore,

e poiché è indipendente allora è minimale per Prop 2.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Se B è generatore ed è minimale allora

non esiste un ins. generatore più piccolo, quindi è <u>INDIP</u>. per Prop 1.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Se B è base è lin. INDIP., ed è massimale

perché non esistono vettori $v \notin \langle B \rangle$ (Prop 3)

(iii) $\Rightarrow$ (i): se B è <u>indip.</u> e massimale allora per Prop 3

non esiste $v \in V$ con $v \notin \langle B \rangle$, quindi B è generatore.

Dim (Lemma dello scambio): $I = \{v_1, \dots, v_k\}$ lin. INDIP.

$G = \{w_1, \dots, w_p\}$ generatori

dobbiamo far vedere che $k \leq p$.

Scambiamo i vettori v_i con alcuni w_j, in modo che l'insieme ottenuto sia ancora generatore:

G genera V, quindi $v_1 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$.

siccome $v_1 \neq 0$ gli α_i non sono tutti nulli. Supponiamo $\alpha_1 \neq 0$,

allora $w_1 = \frac{1}{\alpha_1} v_1 + \left(\frac{-\alpha_2}{\alpha_1}\right) w_2 + \dots + \left(\frac{-\alpha_p}{\alpha_1}\right) w_p$

Quindi (Osservazione sopra) $\langle v_1, w_2, w_3, \dots, w_p \rangle = \langle w_1, v_1, w_2, \dots, w_p \rangle = V$

Cioè $\{v_1, w_2, \dots, w_p\}$ è ins. generatore.

Ripetiamo con v_2: $v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_p w_p$, con $\beta_i \in \mathbb{R}$.

gli scalari $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_p$ non possono essere tutti nulli, altrimenti avremmo $v_2 = \beta_1 v_1$ e v_1, v_2 sarebbero lin. DIP.

Supponiamo $\beta_2 \neq 0$, come prima abbiamo

$$w_2 = -\frac{\beta_1}{\beta_2} v_1 + \frac{1}{\beta_2} v_2 + \left(-\frac{\beta_3}{\beta_2}\right) w_3 + \dots + \left(-\frac{\beta_p}{\beta_2}\right) w_p.$$

Come sopra $\langle v_1, v_2, w_3, \dots, w_p \rangle = \langle v_1, v_2, w_2, w_3, \dots, w_p \rangle = V$.

Continuando così possiamo sostituire ogni v_i con un w_j in modo tale che l'insieme rimanga generatore,

quindi deve essere per forza $p \geq k$ ■

Corollario: tutte le basi hanno la stessa cardinalità.

DEF: Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vett. finitamente generato, il numero di vettori presente in una base si chiama dimensione di V, e si denota con $\dim_{\mathbb{R}} V$.

Teorema 2: Sia V un $\mathbb{R}$-sp. vettoriale finitamente generato. Allora

(i) Ogni insieme lin. INDIP. si può completare ad una base

(ii) Ogni insieme generatore contiene almeno una base.

Dim: Sia G un ins. generatore finito, per Prop 1 e Prop 2 possiamo togliere vettori finché non diventa anche lin. INDIP.

∘ questo mostra il punto (ii).

Sia I un ins. lin. INDIP. Per Prop. 3 se I non genera possiamo aggiungere un vettore in modo che il nuovo insieme sia ancora lin. INDIP., e continuare aggiungendo vettori. Il processo si deve fermare, perché per Teor 1 un ins. lin. INDIP. non può contenere più vettori di un insieme generatore.

Questo dimostra (i) ∎

Osservazione: il punto (i) si chiama anche "Teorema del completamento ad una base".

Prop.: Sia V uno sp. vettoriale finitamente generato, e sia $U \subseteq V$ un sottospazio vett.
Allora $\dim_{\mathbb{R}} U \leq \dim V$. E $\dim_{\mathbb{R}} U = \dim_{\mathbb{R}} V \Leftrightarrow U = V$.

Dim: segue immediatamente dal Teor 2.

Esercizio: Calcolare la dimensione dei seguenti sp. vettoriali:
$\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^n$, $M_{2,3}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$.

Svolgimento: • abbiamo mostrato che una base di $\mathbb{R}^4$ è
$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ quindi $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$.

• Analogamente chiamiamo $e_i \in \mathbb{R}^n$ il vettore

$$e_i = (0,\dots,0,\overset{i\text{-esimo posto}}{\overset{\downarrow}{1}},0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{con } i=1,2,\dots,n$$

Allora $(a_1,a_2,\dots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in \mathbb{R}^n$

e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_n) = (0,0,\dots,0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$

Quindi $\{e_1,\dots,e_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$.

• Base di $M_{2,3}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \middle/ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$ è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} M_{2,3}(\mathbb{R}) = 6$$

- $\mathbb{R}[x]^{\leq 2} = \{ a_2x^2 + a_1x + a_0 \ / \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$

$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x^2) + a_1(x) + a_0(1) \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$

$\Rightarrow \{x^2, x, 1\}$ è un insieme generatore,

inoltre $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \{x^2, x, 1\}$ è una <u>base</u> $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x]^{\leq 2} = 3$.

$\boxed{\text{Ex}}$ Sia $W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$.

Mostrare che W è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$, e calcolare $\dim_{\mathbb{R}} W$.

<u>Svolgimento</u> $W = \{ (x,y,z) \ / \ z = -x-y \} =$

$= \{ (x, y, -x-y) \ / \ x, y \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ x(1,0,-1) + y(0,1,-1) \ / \ x,y \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$ è un sottosp. vett.

Ma $(1,0,-1)$ e $(0,1,-1)$ sono lin. INDIP.:

$\lambda(1,0,-1) + \mu(0,1,-1) = (\lambda, \mu, -\lambda-\mu) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} W = 2$.