Altri $\boxed{\text{EX}}$:

1) Sia $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$, $U = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$

$W = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$

Determinare dei generatori di $U+W$ e dei gen. di $U \cap W$.

2) Sia $V = \mathbb{R}[x]_3$. $U = \langle x^3+1, x^2+1 \rangle$

$W = \langle x^3+x^2, 1 \rangle$

Determinare dei generatori di $U+W$ e dei gen. di $U \cap W$.

CAPITOLO IV — BASI E DIMENSIONI

. Dati dei vettori $v_1, \dots, v_k$ in uno sp. vett. V, abbiamo visto che un vettore v può essere espresso (in generale) in diversi modi come comb. lin. di $v_1, \dots, v_k$ (cioè: diversi coefficienti)

p.es.: $V = \mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = (1,1)$ $\quad v_2 = (2,1)$ $\quad v_3 = (1,2)$

$$v = (4,4) = 1 \cdot v_1 + 1 v_2 + 1 v_3 = 4 v_1 + 0 v_2 + 0 v_3$$

E anche: $(0,0) = 0 v_1 + 0 v_2 + 0 v_3 = 3 v_1 + (-1) v_2 + (-1) v_3$.

Se invece prendiamo solo $v_1 = (1,1)$ e $v_3 = (1,2)$

Allora $v = (a,b) = (2a-b) v_1 + (b-a) v_3$ è l'unico modo per scrivere $v = (a,b)$ come comb. lin. di v_1 e v_3

$\boxed{\text{EX}}$ Perché è l'unico ??

Def: • Sia V uno spazio vett. (su $\mathbb{R}$), e $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme finito di vettori di V. Si dice che $\{v_1, \dots, v_k\}$ ~~sono~~ è "linearmente indipendente" se l'unica comb. lin. che dà il vettore nullo 0_V è la combinazione lineare nulla

$$0_V = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k \quad \text{ossia}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0 \in \mathbb{R}.$$
$$\lambda_i \in \mathbb{R}$$

• Se esiste una comb. lin. non nulla dei vettori $v_1, \dots, v_k$ che dà il vettore nullo, i vettori $v_1, \dots, v_k$ si diranno "linearmente dipendenti" (o l'ins. $\{v_1, \dots, v_k\}$)

es. • Abbiamo visto in $\mathbb{R}^2$:

i) i vettori $(1,1), (1,2), (2,1)$ NON sono linearmente indip. (cioè sono linearmente dipendenti)

ii) i vettori $(1,1), (2,1)$ sono linearm. indipendenti

• in $\mathbb{R}^3$ i vettori $(1,0,1)$ e $(1,0,3)$ sono linearmente indipendenti; infatti se $\lambda(1,0,1) + \mu(1,0,3) = (0,0,0)$

allora $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

Quindi l'unica comb. lineare che dà il vettore nullo è quella nulla.

<u>Prop:</u> in un $\mathbb{R}$-spazio vett. V, un insieme finito di vettori $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente se e solo se ogni comb. lin. dei vettori $v_1, \dots, v_k$ si scrive in modo unico.

<u>Ossia</u> se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_k' v_k \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_1', \lambda_2 = \lambda_2', \dots, \lambda_k = \lambda_k'$

<u>Dim:</u> dimostriamo che $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente <u>dipendenti</u> se e solo se esiste un vettore che si può ottenere come 2 combinazioni lin. diverse di $v_1, \dots, v_k$:

- se $v_1, \dots, v_k$ sono lin. dipendenti allora il vettore nullo 0_V si scrive come più comb. lin. (quella nulla e un'altra).

- supponiamo che esistano 2 comb. lin. diverse che danno lo stesso vettore:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \lambda_1' v_1 + \lambda_2' v_2 + \dots + \lambda_k' v_k$$

allora si ha $(\lambda_1 - \lambda_1') v_1 + (\lambda_2 - \lambda_2') v_2 + \dots + (\lambda_k - \lambda_k') v_k = 0_V$

e poiché gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non sono tutti uguali agli scalari $\lambda_1', \dots, \lambda_k'$, allora gli scalari $(\lambda_1 - \lambda_1'), \dots, (\lambda_k - \lambda_k')$ non sono tutti nulli, ossia abbiamo una comb. lin. non nulla che dà il vettore nullo, quindi $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti.

$\blacksquare$

<u>Def:</u> Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Un insieme finito $\{v_1, \dots, v_k\}$ di vettori di V si dice una base di V se:

(i) $\{v_1, \dots, v_k\}$ è un insieme di <u>generatori</u> di V;

e (ii) $\{v_1, \dots, v_k\}$ è un insieme di vettori <u>linearmente indipendente</u>.

<u>Esempi:</u> ① Sia $V = \mathbb{R}^4$ $e_1 = (1,0,0,0)$ $e_2 = (0,1,0,0)$ $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$. ~~Allora~~ L'insieme $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è una base di $V = \mathbb{R}^4$.

e_1, e_2, e_3, e_4 generano $\mathbb{R}^4$:

$v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ $\quad v = a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4$

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è un insieme lin. INDIP. di vettori di $\mathbb{R}^4$:

se $0_V = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

2) Abbiamo già visto: $\{(1,1),(2,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ (48)

infatti $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $v=(2a-b)(1,1)+(b-a)(2,1)$ è

comb. lin. di $(1,1)$ e $(2,1)$.

Inoltre se $\lambda_1(1,1)+\lambda_2(2,1)=(\lambda_1+2\lambda_2,\ \lambda_1+\lambda_2)=(0,0)$

allora $\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}$, quindi la

comb. lin. nulla è l'unica che dà il vettore zero.

3) Sia $W=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{R}) \,/\, a+d=0\right\}$

allora l'insieme $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ è una base di W

- una matrice $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ con $a+d=0$ si scrive

  $a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ come comb. lin. delle 3 nell'ins.

- Se $\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=0_W=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

  Allora $\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_3 & -\lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ quindi $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

$\boxed{EX}$ Sia $V=\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$, mostrare che l'insieme

$\{1,\ x^3+x^2,\ x^2+1,\ x\}$ è una base.

Fine Lezione 10/03

Svolgimento: mostriamo che generano

Sia $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in V$

$$\lambda_1 1 + \lambda_2(x^3 + x^2) + \lambda_3(x^2+1) + \lambda_4 x = P(x)$$

$$\Updownarrow \quad \lambda_2 x^3 + (\lambda_2+\lambda_3)x^2 + \lambda_4 x + (\lambda_1+\lambda_3)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = a \\ \lambda_2+\lambda_3 = b \\ \lambda_4 = c \\ \lambda_1+\lambda_3 = d \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = d-a \\ \lambda_2 = +a \\ \lambda_3 = b-a \\ \lambda_4 = c \end{cases}$$

In particolare $P(x)=0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 0 \quad \lambda_4 = 0$

Vediamo adesso alcune proprietà di

insiemi di generatori, insiemi lin. indip., basi:

vogliamo mostrare: i) $\{v_1, \dots, v_k\}$ generatori $\xrightarrow{\text{togliamo}}$ $\{v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_j}\}$ base

ii) $\{w_1, \dots, w_r\}$ lin. indip. $\xrightarrow{\text{aggiungiamo}}$ $\{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_{r+h}\}$ base

iii) tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori

iv) $\rightsquigarrow$ dimensione di V; formula Grassmann: $\boxed{\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U+W)}$

Si può fare in tutti gli sp. vett. finitamente generati.

Cioè, vogliamo dimostrare i seguenti: