<u>Esercizio</u>: Sia $V = \mathbb{R}^2$. Verificare che i 2 vettori $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,-1)$ sono dei generatori di $V$.

<u>Svolg.</u>: Sia $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, dobbiamo cercare dei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$:

scriviamo $(a,b) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$

quindi dobbiamo avere $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_1 - \lambda_2 = b \end{cases}$

Questo, risolvendo il sistema: $\begin{cases} \lambda_1 = b + \lambda_2 \\ b + \lambda_2 + \lambda_2 = a \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_2 = \frac{a-b}{2} \\ \lambda_1 = \frac{a+b}{2} \end{cases}$

permette di ottenere $v = (a,b) = \frac{a+b}{2}(1,1) + \frac{a-b}{2}(1,-1)$

Quindi $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,-1)$ formano un insieme di generatori

<u>Esercizio</u>: Sia $V = \mathbb{R}^2$. I 3 vettori $v_1 = (1,1)$ $v_2 = (2,1)$ $v_3 = (1,2)$ sono generatori di $V$?

<u>Svolg.</u>: Come sopra, scriviamo $v = (a,b) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

$(a,b) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,1) + \lambda_3(1,2) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3;\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)$

dobbiamo avere $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ a - 2\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = b \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a - 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = b - a + \lambda_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2a - b - 3\lambda_2 \\ \lambda_3 = b - a + \lambda_2 \end{cases}$ tutte sol. (p.es) $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = \\ \lambda_3 = \end{cases}$

**Def:** Siano $v_1, \ldots, v_k$ dei vettori di $V$.
Il "sottospazio generato da $\{v_1, \ldots, v_k\}$" è l'insieme di tutte le combinaz. lineari dei vettori $v_1, \ldots, v_k$, si denota $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$:

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \left\{ \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \;/\; \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

**EX** Verificare che l'insieme $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ è un sottosp. vett. (utilizzare il criterio di sottospazio)

**Osservazione:** $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ è il più piccolo sottospazio vett. di $V$ contenente $v_1, \ldots, v_k$.

**Def:** Sia $U$ un sottosp. vett. dello sp. vettoriale $V$. Si dice che $v_1, \ldots, v_k$ sono dei generatori di $U$ se
$U = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subset V$.

**EX** Trovare dei generatori del sottospazio delle matrici $2 \times 2$ simmetriche $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2}$
(mostrare che $U$ è un sottosp. vett.)

**EX** Mostrare che l'insieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\} \subset M_{2,2}(\mathbb{R})$ è un sottosp. vett. e trovare dei generatori.

**EX** Mostrare che l'ins. dei pol. palindromi di grado $\leq 3$
$U = \{ ax^3 + bx^2 + bx + a \;/\; a, b \in \mathbb{R} \}$ è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}[x]^{\leq 3}$, trovare g

# Operazioni Tra Sottospazi

- I sottospazi sono particolari sottoinsiemi di uno sp. vett. $V$, come si comportano rispetto all'unione e intersezione ??

**Prop:** Sia $V$ uno sp. vett., siano $U$ e $W$ due sottosp. vett. di $V$. Allora l'insieme $U \cap W$ è un sottosp. vett. di $V$.

**Dim:** utilizziamo il criterio di sottospazio:

sappiamo che $U \cap W = \{v \in V / v \in U \text{ e } v \in W\}$

poiché $0_V \in U$ e $0_V \in W$ allora $U \cap W \neq \emptyset$.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ uno scalare, e $v_1, v_2 \in U \cap W$ 2 vettori in $U \cap W$.

(i) poiché $U$ è sottosp. e $v_1 \in U \Rightarrow \alpha v_1 \in U$
poiché $W$ ——— $v_1 \in W \Rightarrow \alpha v_1 \in W$ $\Big| \Rightarrow \alpha v_1 \in U \cap W$

(ii) $U$ sottosp. vett. e $v_1, v_2 \in U \Rightarrow v_1 + v_2 \in U$
$W$ ——— $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$ $\Big| \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$

$\blacksquare$

Abbiamo già visto che l'unione di 2 sottosp. vett. <u>non è</u> in generale un sottospazio: p.es. $V = \mathbb{R}^2$ $U = \langle (1,1) \rangle$ $W = \langle (1,-1) \rangle$

abbiamo visto che $U \cup W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

e che questo non è un sottospazio

**Prop:** $V =$ sp. vett. $U, W$ due sottosp. vett.

L'unione $U \cup W$ è un sottosp. vett. solo se $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$

**Dim:** Mostriamo che se $U \not\subseteq W$ e $W \not\subseteq U$ allora

$U \cup W$ non è un sottospazio.

Se $U \not\subseteq W$ esiste un vettore $u \in U \setminus W$, cioè $u \in U$ e $u \notin W$.

Se $W \not\subseteq U$ ——— $w \in W \setminus U$.

Mostriamo che $u + w \notin U \cup W$:

se fosse $u + w \in U$ allora poiché $w = (w + u) + (-u)$

si avrebbe $w \in U$ perché $U$ è sottosp. vett., ma

per ipotesi $w \in W \setminus U$, quindi non si può avere $w \in U$.

In modo simile non può essere $u + w \in W$,

altrimenti $u = (u + w) + (-w) \in W$, e questo non può ess

Quindi $U \cup W$ non è chiuso rispetto alla somma,

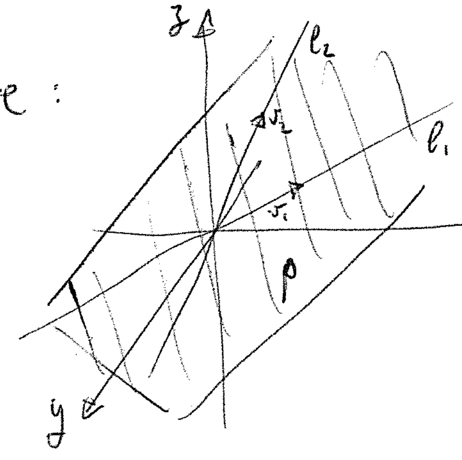
e non può essere un sottospazio. ▨

$\boxed{\text{Ex}}$ Siano $U, W$ due sottosp. vett. di uno sp. vett. $V$.

Mostrare che $U \cup W$ è un sottoinsieme

chiuso rispetto al prodotto per scalari.

Un piano che contiene 2 rette:




$\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc} \langle v_1 \rangle & & \langle v_2 \rangle \\ \parallel & & \parallel \end{array}$$

2 rette $\ell_1$ e $\ell_2$

$\ell_1 \cup \ell_2$ non è sottosp. vett.

$\ell_1$ e $\ell_2$ sono contenute nel piano $\rho = \langle v_1, v_2 \rangle$

Il piano $\rho$ è il più piccolo sottosp. vett. che contiene $\ell_1 \cup \ell_2$

In generale definiamo il seguente sottoinsieme:

**Def:** Sia $V$ uno sp. vett. , $U$ e $W$ due sottospazi vett. di $V$.
Si definisce somma $U+W$ di $U$ e $W$ l'insieme

$$U + W = \{ u + w \in V \,/\, u \in U \text{ e } w \in W \}.$$

**Prop:** $U+W$ è il più piccolo sottospazio vett. di $V$ che contiene $U \cup W$.

**Dim:** se mostriamo che $U+W$ è un sottosp. vett. abbiamo finito

criterio: sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $v, v' \in U+W$, $v = u + w$ e $v' = u' + w'$
$u, u' \in U$, $w, w' \in W$

allora $\alpha v = \alpha(u+w) = \alpha u + \alpha w \in U+W$ perché $U, W$ sono sottosp. vett. . Analogamente $v + v' = (u+w) + (u'+w') = (u+u') + (w+w')$
quindi anche $v + v' \in U+W$. Criterio $\Rightarrow$ $U+W$ sottosp. vett.

Poiché ogni sottosp. vett. che contenga $U$ e $W$ deve contenere $U+W$
[illegible] allora $U+W$ è il più piccolo

Esercizio: Sia $V = \mathbb{R}^4$

$U = \langle (1,1,0,0), (0,1,1,0) \rangle$

$W = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,0) \rangle$

Determinare dei generatori di $U+W$ e $U \cap W$.

Svolgimento: poiché $U = \{ \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

e $W = \{ \gamma(1,0,1,0) + \delta(0,1,0,0) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R} \}$, allora

$U+W = \{ \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) + \gamma(1,0,1,0) + \delta(0,1,0,0) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \} =$

$= \langle (1,1,0,0), (0,1,1,0), (1,0,1,0), (0,1,0,0) \rangle$ cioè

abbiamo trovato 4 generatori per $U+W$.

Come trovare dei generatori per $U \cap W$?

Descriviamo il sottosp. $U \cap W = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v \in U \text{ e } v \in W \}$

Dunque se $v = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ $v \in U \cap W$ se e solo se

$v = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0)$ e $v = \gamma(1,0,1,0) + \delta(0,1,0,0)$

per opportuni $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

In particolare $v = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) = \gamma(1,0,1,0) + \delta(0,1,0,0)$

e ogni scelta di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che $\alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) = \gamma(1,0,1,0) + \delta(0,1,0$

dà un vettore $v = \alpha(1,1,0,0) + \beta(0,1,1,0) \in U \cap W$.

Dobbiamo quindi trovare tutte le soluzioni (i possibili $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$)

di quest'equazione: $(\alpha, \alpha+\beta, \beta, 0) = (\gamma, \delta, \gamma, 0)$

Cioè dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha+\beta = \delta \\ \beta = \gamma \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \\ \delta = 2\gamma \end{cases}$$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ è libero di variare

Otteniamo quindi: $U \cap W = \{(\gamma, 2\gamma, \gamma, 0) / \gamma \in \mathbb{R}\} =$

$= \{\gamma(1,2,1,0) / \gamma \in \mathbb{R}\} =$

otteniamo un generatore

$= \langle (1,2,1,0) \rangle \subset \mathbb{R}^4$

---

Da questo esercizio, vediamo che vale

Prop: Sia $V$ uno sp. vett., $U, W$ due sottosp. vett. con generatori $U = \langle u_1, \dots, u_r \rangle$ e $W = \langle w_1, \dots, w_s \rangle$.

Allora $U + W = \langle u_1, u_2, \dots, u_r, w_1, w_2, \dots, w_s \rangle$.

Dim: come nello svolgimento dell'esercizio $\boxtimes$

Esercizio 8 foglio 2 :

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \,/\, a + d = 0 \right\} \subset \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

(a) verificare che $W$ è un sottosp. vett. di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

(b) determinare un insieme di generatori di $W$

(c) determinare 2 sottospazi distinti $W_1$ e $W_2$ di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

tali che $W \cap W_1 = W \cap W_2 = \{0\}$ e

$$W + W_1 = W + W_2 = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

Svolgimento : (a) criterio per $W$ $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$

sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ $A, B \in W$

cioè $a + d = e + h = 0$

allora $\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ e $\alpha a + \alpha d = \alpha(a+d) = 0$

quindi $\alpha A \in W$

$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ e $a + e + d + h = 0 \Rightarrow A + B \in W$

Quindi $W$ è un sottosp. per il criterio.

(b) generatori : $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \,/\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$

$a + d = 0 \Leftrightarrow d = -a$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \,/\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) troviamo intanto un tale $W_1 \subset M_{2,2}(\mathbb{R})$

prendiamo una matrice $G$ tale che $G \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \setminus \overline{W}$
cioè t.c. $a+d \neq 0$

p. es. $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

prendiamo $W_1 = \langle G \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \right\}$

$W + W_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$

Anche la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in W + W_1$

$\Rightarrow W + W_1 = M_{2,2}(\mathbb{R})$

$W_1 \cap W = \{0\}$ ?? Cerchiamo una matrice nell'intersezione

$D \in W_1 \cap W \Rightarrow D = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ per un $t \in \mathbb{R}$ perché $D \in W_1$

e $t + 0 = 0$ perché $D \in \overline{W}$

$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{M_{2,2}}$

---

Prendiamo ora $W_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ : stessa cosa

$W_2 + W = M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $W_2 \cap W = \{0\}$.

Inoltre $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W_2$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W_1$, quindi $W_1 \neq W_2$