Altri Esempi di spazi vettoriali:

• Spazi di Polinomi: abbiamo visto $\mathbb{R}[x]$, e $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$

possiamo considerare $\mathbb{R}[x]^{\leq d} = \{P(x) \in \mathbb{R}[x] \,/\, P(x) = a_d x^d + \dots + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}\}$

questo è uno spazio vettoriale (somma e prod. per scalari come prima).

Es. $x^3 + x \in \mathbb{R}[x]^{\leq 3}$

$x^5 \in \mathbb{R}[x]^{\leq 7}$ $\qquad 3 \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ ecc.

prodotto per scalari $-\sqrt{2}\,(x^2+1) = -\sqrt{2}\,x^2 - \sqrt{2}$ ecc.

Il polinomio nullo è il polinomio con tutti i coefficienti nulli

esso è lo 0_V dello sp. vett. $V = \mathbb{R}[x]$ o $\mathbb{R}[x]^{\leq d}$.

• spazi di funzioni: sia $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ un intervallo

l'insieme $\mathbb{R}^I = \{f : I \to \mathbb{R}\}$ di tutte le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x)$

è uno sp. vett. $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha \cdot f(x) \qquad f+g : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x)$$

Anche l'insieme $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(I) : \{f : I \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ è continua su } I\}$

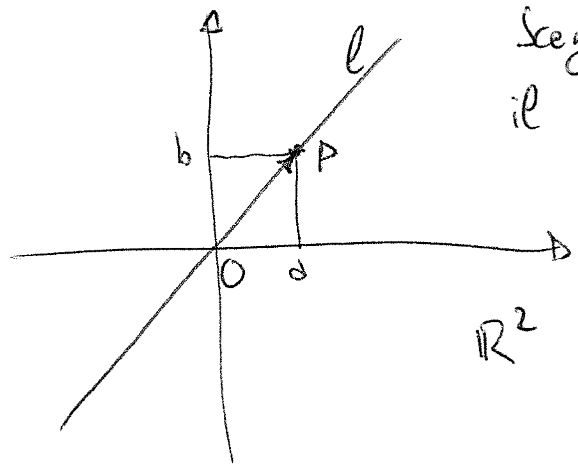
con le "stesse" operazioni è uno sp. vett.

$\boxed{Ex}$ $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(I) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(I)$ è uno sp vettoriale?

Capitolo III : sottospazi + altre costruzioni

- Costruiamo altri spazi vettoriali, a partire da sp. vettoriali che già conosciamo: i sottospazi

(es.) ~~Nella~~ Nel piano $\mathbb{R}^2$, prendiamo una retta per O:



Scegliamo un punto $P \neq O$ e il vettore corrispondente (a,b)

Tutti i vettori sulla retta l saranno multipli di (a,b):

$$l = \{ t(a,b) = (ta,tb) \;/\; t \in \mathbb{R} \}$$

Se guardiamo solo i vettori di l, questi formano uno sp. vett:

possiamo sommarli: $(ta,tb) + (sa,sb) = ((t+s)a, (t+s)b) \in l$

e molt. per scalare: $\alpha \in \mathbb{R}$ $(ta,tb) \in l$ $\alpha(ta,tb) = (\alpha t a, \alpha t b) \in$

(es) Gli spazi di polinomi con grado $\leq d$ sono contenuti negli spazi di polinomi di grado $\leq d+1$

p. es. $\mathbb{R}[x]^{\leq 2} = \{ ax^2 + bx + c \;/\; a,b,c \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}[x]^{\leq 3} = \{ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \;/\; \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$

e la somma $+_{\mathbb{R}[x]^{\leq 3}}$ di due polinomi $P, Q \in \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$

è la stessa cosa che la somma $+_{\mathbb{R}[x]^{\leq 2}}$ dei pol. P e Q —

$\boxed{EX}$ Considerare $\mathbb{R}[x]^{\leq 5} \subset \mathbb{R}[x]$, la somma è "la stessa"?

Vediamo la definizione di sottospazio:

<u>Def</u>: Sia V uno spazio vettoriale, un sottospazio $\bar{U}$ di V è un sottoinsieme non vuoto $\bar{U} \subset V$ tale che le operazioni di somma e prodotto per uno scalare definite su V inducono su $\bar{U}$ una struttura di spazio vettoriale

Cosa vuol dire? Vuol dire che la somma di 2 elementi di $\bar{U}$ è ancora un el. di $\bar{U}$, il prodotto di un elemento di U per uno scalare è ancora in $\bar{U}$, e queste 2 operazioni su $\bar{U}$ soddisfano gli assiomi di sp. vet

- In pratica non dobbiamo verificare tutti gli assiomi ma basta la seguente

<u>Prop</u> (Criterio di sottospazio): Un sottoinsieme non vuoto $\bar{U}$ di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale se e solo se: (i) $\forall u \in \bar{U}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u \in \bar{U}$ (chiusura rispetto al prodotto per uno scalare)

(ii) $\forall u, v \in \bar{U}$, $u + v \in \bar{U}$ (chiusura rispetto alla somma)

<u>Dim</u>: ($\Rightarrow$) Se $\bar{U}$ è un sottosp. vett. verifica gli assiomi, (i) e (ii) seguono

($\Leftarrow$) Se (i) e (ii) sono verificate abbiamo le 2 operazioni ben definite su $\bar{U}$. Gli assiomi seguono dal fatto che sono verificati per V. <u>Esempi</u>.

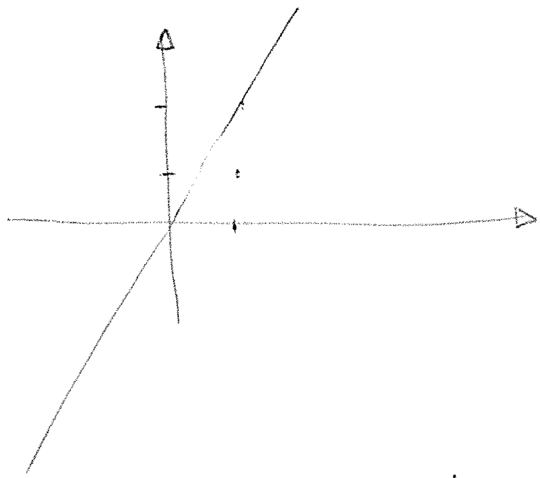
<u>Notazione</u>: "U è un sottospazio di V" si scrive con "$U \leq V$"

<u>Esempi e Controesempi</u>:

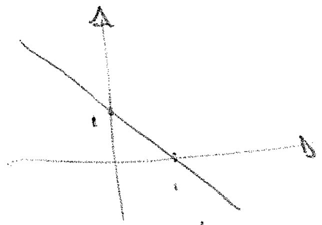
(1) Ogni spazio vettoriale V ha come sottospazio V stesso, ed il sottospazio banale $\{0_V\}$

(2) Sia $V=\mathbb{R}^2$. Fissiamo un vettore $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
L'insieme $\{\alpha v \,/\, \alpha\in\mathbb{R}\} = \{(\alpha a, \alpha b) \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ è un sottosp. vett. (dimostrare con il <u>criterio</u>).

Es. $v=(1,2)$

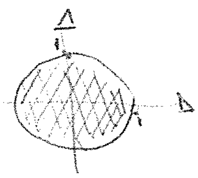


(3) In $\mathbb{R}^2$, l'insieme $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x+y=1\}$
NON è un sottospazio: infatti $(1,0)\in U$
ma $(2,0)=(1,0)+(1,0)\notin U$



Anche $(0,0)=0\cdot(1,0)\notin U$ mentre ogni sottospazio vettoriale deve contenere lo 0.

(4) $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\leq 1\}\subset\mathbb{R}^2$



non è un sottospazio vett..
Infatti $0_{\mathbb{R}^2}\in U$, però sia $(0,1)$ che $(1,0)$ sono in U,
mentre $(0,1)+(1,0)=(1,1)\notin U$.

Attenzione: non basta una sola delle 2 proprietà del criterio!

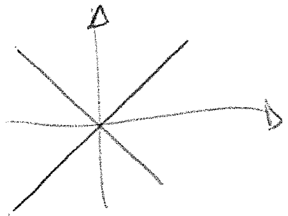
5) $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ è uno spazio vettoriale.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è chiuso rispetto alla somma, ma non soddisfa la chiusura per moltiplicazione per scalari:

$\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $3 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

6) Sia $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0 \iff x = y$ oppure $x = -y$



$0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in U$

Inoltre $(x,y) \in U \Rightarrow \alpha(x,y) \in U \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Però $(1,1)$ e $(1,-1)$ sono in U mentre

$(2,0) = (1,1) + (1,-1) \notin U$

$\boxed{\text{EX}}$ Provare che $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ è sottosp. vet

---

Come descrivere un sottospazio vettoriale $U \leq V$??

Se prendiamo r vettori $u_1, \dots, u_r \in U$, e r scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$

supponiamo che anche $\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_r u_r \in U$, quindi

anche $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r \in U$, questa somma

si chiama "combinazione lineare dei vett. $u_1, \dots, u_r$".

<u>Def</u>: dato un insieme di vettori $v_1,\dots,v_n$ di uno spazio vettoriale V, si dice che un vettore $v\in V$ è combinazione lineare dei vettori $v_1,\dots,v_n$ se esistono dei numeri reali $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tali che

$$v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n .$$

<u>Osservazione</u>: $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ si chiamano <u>coefficienti</u> della combinazione lineare $\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$

(es.) La matrice $\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}$ è comb. lin. delle matrici $\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$ infatti!

$$2\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}\qquad(\text{coeffic. } 2 \text{ e } 3)$$

La stessa matrice $\begin{pmatrix}-1&3\\2&1\end{pmatrix}$ è anche combin. lineare delle matrici $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ con coeff. $-1,3,2,1$

<u>Osservazione</u>: 0_V è comb. lin. di qualunque insieme di vettori. Basta prendere tutti i coefficienti 0.

<u>Oss</u>: prendiamo i 3 vettori di $\mathbb{R}^3$: $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ $e_3=(0,0,1)$

Allora ogni vettore $v\in\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di e_1,e_2,e_3

Se $v=(a,b,c)$ allora $v=ae_1+be_2+ce_3$.

Quindi abbiamo un insieme finito di vettori di $\mathbb{R}^3$ tali che ogni altro vettore è combinazione lineare di questi.

Questo ci dice che $\mathbb{R}^3$ è "finitamente generato".

<u>Attenzione</u>: questo insieme di vettori e_1, e_2, e_3 non è l'unico con questa proprietà ("generare" $\mathbb{R}^3$):

prendiamo $f_1 = (1,0,0)$ $f_2 = (1,1,0)$ $f_3 = (1,1,1)$

Allora ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è comb. lin. di f_1, f_2 e f_3:

se $v = (a,b,c)$, allora $v = (a-b)(1,0,0) + (b-c)(1,1,0) + c(1,1,1)$

<u>Def</u>: Uno spazio vettoriale V si dice "finitamente generato" se esiste un insieme finito di vettori $v_1, \dots, v_n$ tale che ogni vettore $v \in V$ sia una comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$.
Tali vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono "generatori" di V.

<u>Osserv.</u>: non tutti gli spazi vettoriali che abbiamo visto sono finitamente generati:

$\mathbb{R}[x]$ lo spazio vett. di tutti i polinomi reali NON è finitamente generato: prendiamo un insieme finito $\{P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ di polinomi, sia N il massimo dei loro gradi, allora x^{N+1} <u>non</u> è comb. lin. di $P_1, \dots, P_n$.

$\boxed{EX}$ Dimostrare che i seguenti spazi vettoriali sono finitamente generati: $\mathbb{R}^n$, $M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[x]^{\leq d}$