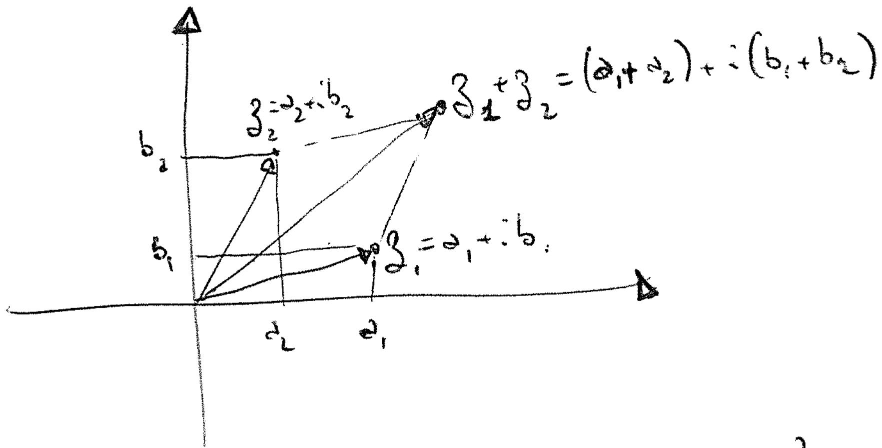
Capitolo II: Spazi Vettoriali

• Abbiamo visto come identificare i numeri complessi con i punti di un piano e la somma di vettori con la somma di numeri complessi:



Il piano in considerazione è il piano $\mathbb{R}^2$ i cui punti sono identificati da 2 coordinate: $\mathbb{R}^2=\{(a,b) / a,b\in\mathbb{R}\}$.

Se pensiamo ai punti di $\mathbb{R}^2$ come vettori, allora la somma di vettori tramite la regola del parallelogramma vista sopra corrisponde alla somma $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$.

• Prendiamo lo spazio $\mathbb{R}[x]^{\leq 1}$ dei polinomi di grado ≤ 1: $\mathbb{R}[x]^{\leq 1}=\{P(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$. Anche in questo caso possiamo rappresentare i polinomi con coppie di num. reali e la somma di 2 polinomi $P(x)=ax+b$ e $Q(x)=cx+d$ è il polinomio $P(x)+Q(x)=ax+b+cx+d=(a+c)x+(b+d)$

Quindi la somma di polinomi corrisponde a $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

• Abbiamo visto 3 esempi di campo, i razionali $\mathbb{Q}$, i reali $\mathbb{R}$, e i complessi $\mathbb{C}$. Fissato un campo k, definiamo

Def: Uno spazio vettoriale su un campo k è il dato di:

(i) Un insieme non vuoto V munito di un'operazione

$$+_v : V \times V \longrightarrow V \qquad (v, w) \longmapsto v +_v w$$

detta somma, soddisfacente le seguenti condizioni

A. associatività: $\forall\, u, v, w \in V \quad (u +_v v) +_v w = u +_v (v +_v w)$

B. commutatività: $\forall\, v, w \in V \quad v +_v w = w +_v v$

C. el. neutro: $\exists\, 0_v \in V \,/\, \forall\, v \in V \quad v +_v 0_v = 0_v +_v v = v$

D. el. opposto: $\forall\, v \in V \ \exists\, (-v) \in V \,/\, v +_v (-v) = 0_v$

(ii) Un'azione esterna di k su V, cioè un'applicazione

$$k \times V \longrightarrow V \qquad (r, v) \longmapsto rv$$

detta anche prodotto per scalari

(iii) La somma e il prodotto per scalari verificano le seguenti condizioni

(α) $\forall\, v \in V, \quad 1v = v$

(β) $\forall\, v \in V, \forall\, a, b \in k \quad (a+b)v = av +_v bv$

(γ) $\forall\, v, w \in V, \forall\, a \in k \quad a(v +_v w) = av +_v aw$

(δ) $\forall\, v \in V, \forall\, a, b \in k \quad (ab)v = a(bv)$

Prime proprietà degli spazi vettoriali:

1. $\overset{\overset{k}{\downarrow}}{0} v^{\in V} = 0_V^{\in V} \quad \forall v \in V$. Infatti:

$0v = (\underbrace{0+0}_{\in k})v = 0v +_V 0v$. Quindi, se $(-0v)$ è l'opposto:

$0_V = 0v +_V (-0v) = (0v +_V 0v) +_V (-0v) = 0v +_V (0_V +_V (-0_V)) =$

$= 0v +_V 0_V = 0v$

2. $\forall v \; (\underbrace{-1}_{\in k}) \underbrace{v}_{\in V} = -v$ l'opposto di v. Infatti:

$0_V = 0v = (1+(-1))v = 1v +_V (-1)v = v +_V (-1)v$,

dunque $v +_V (-1)v = 0_V$ cioè $(-1)v = -v$ è l'opposto di $v \in V$.

3. $\forall \alpha \in k \quad \alpha 0_V = 0_V$. Infatti:

$\alpha 0_V = \alpha(0_V +_V 0_V) = \alpha 0_V +_V \alpha 0_V$, da cui

$0_V = \alpha 0_V +_V (-\alpha 0_V) = \alpha 0_V +_V \alpha 0_V + (-\alpha 0_V) = \alpha 0_V$

4. Se $\alpha \neq \beta \quad \alpha, \beta \in k$, e se $v \in V$ e $v \neq 0_V$

Allora $\alpha v \neq \beta v$. Infatti:

$\alpha v = \beta v \iff \alpha v +_V (-\beta v) = \beta v +_V (-\beta v) = 0_V \iff (\alpha - \beta) v = 0_V$

$\iff \frac{1}{\alpha-\beta}((\alpha-\beta)v) = \left(\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)\right)v = v = \frac{1}{\alpha-\beta} 0_V = 0_V$

poiché $\alpha - \beta \neq 0$

//

Osservazioni:

(a) Un elemento di uno spazio vettoriale si dice "vettore".

La frase "v è un vettore" vuol dire "v è un elemento di uno spazio vettoriale".

(b) Si possono costruire spazi vettoriali su qualsiasi campo K, però ci limiteremo quasi sempre al campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

(c) La somma $+_V$ nello spazio vettoriale V è diversa dalla somma $+$ nel campo K (sono definite su insiemi diversi). Per non appesantire le notazioni le denotiamo d'ora in poi entrambe col simbolo $+$.

(Es.) • Lo spazio vettoriale banale, o nullo:

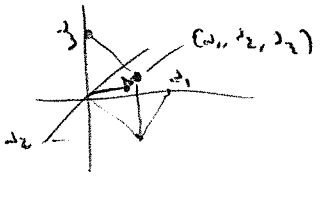
$V=\{0_V\}$ $\quad 0_V+0_V=0_V$, e $\forall \alpha\in K$ $\alpha 0_V=0_V$.

è lo spazio vett. più piccolo che si possa definire.

• $\mathbb{R}^2=\{(a,b)\,/\,a,b\in\mathbb{R}\}$ $\qquad (a,b)+(c,d):=(a+c,\,b+d)$, $\quad \alpha(a,b)=(\alpha a,\,\alpha b)$

• $\mathbb{R}^3=\{(a_1,a_2,a_3)\,/\,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$ $\qquad (a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=$
$=(a_1+b_1,\,a_2+b_2,\,a_3+b_3)$

$\alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3)$



Più in generale: fissiamo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

- Gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^n$ = n-uple ordinate di numeri reali:

$\mathbb{R}^n = \{ (a_1, \dots, a_n) \,/\, a_i \in \mathbb{R} \;\; i=1,\dots,n \}$, dove la somma è definita

$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$ coordinata per coordinata

e $\alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$ analogamente il prodotto per uno scalare

$\boxed{EX}$ i) Verificare che $\mathbb{R}^n$ con queste operazioni soddisfa gli assiomi di spazio vettoriale.

ii) Chi è il vettore nullo 0_V per $V = \mathbb{R}^n$?

iii) Chi è l'opposto di $(a_1, \dots, a_n)$?

- Lo spazio dei polinomi

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \,\Big/\, \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

dove la somma è definita come somma di polinomi:

se $m \geq n$ $\quad P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_{n+1} x^{n+1} + b_n x^n + \dots + b_0$

$$P(x) + Q(x) = b_m x^m + \dots + b_{n+1} x^{n+1} + (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_1+b_1) x + (a_0 + b_0)$$

e $\alpha \cdot P(x) = \alpha(a_n x^n + \dots + a_0) = (\alpha a_n) x^n + \dots + (\alpha a_1) x + \alpha a_0$

$\boxed{EX}$: Come sopra
- verificare che $\mathbb{R}[x]$ è sp. vett.
- chi è 0?
- chi è $-P(x)$?

- Gli spazi $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ delle matrici $m\times n$ a entrate reali:

Def: Siano $m, n \in \mathbb{N}$ interi non nulli. Una matrice reale $m\times n$, ad m righe e n colonne, è una tabella A del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

t.c. tutti gli a_{ij} siano dei numeri reali

es. (2) è una matrice 1×1 reale (o a entrate reali)

es. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è una matrice 3×1 (a entrate reali)

es. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ è matrice 3×4

Somma di matrici:

Fissiamo $m, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrici $m\times n$

ossia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

La somma $A+B$ delle matrici A e B sarà la matrice $m\times n$

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$ ossia $A+B = (a_{ij}+b_{ij})$

<u>NB</u>: Si sommano solo matrici dello stesso tipo, cioè con lo stesso numero di righe e di colonne, e la somma si effettua entrata per entrata.

(es.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Prodotto di una matrice con uno scalare:

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisce la matrice prodotto di A per lo scalare α

$\alpha A = (\alpha a_{ij})$, cioè si moltiplica per α <u>ogni</u> entrata di A.

(es.) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ $\alpha = -2$

$$-2A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -14 & -6 \\ -4 & -2 & -10 & -8 \\ -6 & -14 & -2 & -22 \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: L'insieme delle matrici ad m righe ed n colonne ad entrate reali si denota $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ con somma e prodotto per scalari definito sopra è uno spazio vettoriale.

$\boxed{\text{EX}}$ Verificare che $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ è sp. vett.. Chi è 0? Chi è l'opposto di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$? Esibire altri elementi di $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$