I SISTEMI LINEARI

DEF: i) Un sistema di equazioni lineari, o sistema lineare, di m equazioni in n incognite, a coefficienti reali, è una lista di m equazioni in $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ii) il sistema lineare si dice omogeneo se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$

iii) Una matrice (reale) $m \times n$ è una griglia di numeri reali, disposti in m righe e n colonne, p.es. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$ è una m. 2×3

l'insieme di tutte le matrici $m\times n$ si denota $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

iv) Dato un sistema lineare come sopra, a questo sistema associamo le seguenti matrici:

- la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

- la colonna dei termini noti $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

- la matrice completa $(A \mid \underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R})$

NOTAZIONE: Un modo per scrivere il sistema lineare associato alla matrice completa $(A|b)$, con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ATTENZIONE

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ha n righe! può essere $n \neq m$

$n =$ numero di incognite
$m =$ numero di equazioni

vedremo più avanti che questa scrittura significa esattamente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se scriviamo $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ colonna delle incognite $\rightsquigarrow A\underline{x} = \underline{b}$

Dato un sistema lineare, trovare una soluzione vuol dire trovare una "n-upla" $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ che verifichi tutte le equazioni.

"Risolvere" il sistema lineare vuol dire determinare tutte le soluzioni, cioè $S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \right\}$

Vogliamo capire:

- Quando un sistema ammette soluzioni (cioè è "risolubile");
- Quando ha una sola soluzione, e quando invece ne ha tante;
- Com'è fatto l'insieme S di tutte le soluzioni;
- Trovare un metodo per ottenere tutte le soluzioni.

Come ottenere tutte le soluzioni? Un metodo che conosciamo è "per sostituzione":

(es).
$$\begin{cases} x + y + 3z - t = 1 \\ 3y - z + 2t = 2 \end{cases}$$
esplicitiamo la y, poi la x:

dalla 2ª equazione: $y = \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}$

dalla 1ª ——: $x = -y - 3z + t + 1 = -\frac{10}{3}z + \frac{5}{3}t + \frac{1}{3}$

Quindi tutte le soluzioni sono del tipo

$\left(\frac{1}{3} - \frac{10}{3}z + \frac{5}{3}t,\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t,\ z,\ t\right)$ al variare di $z, t \in \mathbb{R}$

Una soluzione particolare è $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$ scegliendo $z=0, t=0$

Un'altra è $(2, 0, 0, 1)$ scegliendo $z=0, t=1$, ...

Se facciamo la differenza tra le due:

$(2,0,0,1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 1\right)$

questa <u>non</u> è ancora una soluzione del sistema: infatti

$$\begin{cases} \frac{5}{3} + \left(\frac{-2}{3}\right) + 3(0) - 1 = 0 \neq 1 \\ 3\left(-\frac{2}{3}\right) - (0) + 2(1) = 0 \neq 2 \end{cases}$$

Ma è soluzione del sistema omogeneo con la stessa matrice incompleta! Questo sarà utile per descrivere le soluzioni...

Ritornando alla domanda: "come trovare tutte le soluzioni?"

Guardiamo la matrice completa associata al sistema che abbiamo appena risolto:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

è a scalini...

questo ci permette di scrivere facilmente le soluzioni per sostituzione delle variabili corrispondenti ad uno scalino, prima quella più in basso (la y), poi l'altra (la x).

DEF: Diciamo che una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è "a gradini" se per ogni riga il primo elemento non nullo è più a destra del primo elemento non nullo sulla riga precedente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} =0 & =0 & =0 \end{array}$$

p. es. se $a_{11} \neq 0$ allora $a_{21} = a_{31} = a_{41} = \dots = a_{m1} = 0$

per la seconda riga, se $a_{22} = 0$ e $a_{23} \neq 0$

allora $a_{32} = a_{42} = \dots = a_{m2} = 0$ e $a_{33} = a_{43} = \dots = a_{m3} = 0$

Gli elementi in corrispondenza del gradino (nell'esempio a_{11}, a_{23}, e altri...) sono chiamati "pivot".

Le variabili del sistema con matrice $(A|\underline{b})$ a gradini corrispondenti ad un pivot (nell'esempio x_1, x_3, ...) sono "variabili-pivot".

Come nell'esempio precedente, se un sistema lineare è a scalini, si può risolvere per sostituzione partendo dalla variabile-pivot più in basso (facendo attenzione ai termini noti!):

ATTENZIONE: se la matrice completa è a gradini, l'ultimo gradino potrebbe essere un termine noto, in questo caso il sistema non ha soluzioni:

infatti l'ultima equazione sarebbe

$$0 \cdot x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = \underset{\neq 0}{b_m}$$ che non ha soluzioni!

Altrimenti l'ultima equazione è

$$0x_1 + 0x_n + \dots + a_{mk}x_k + a_{mk+1}x_{k+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \qquad \underset{\text{pivot}}{a_{mk}} \neq 0$$

otteniamo $$x_k = \frac{1}{a_{mk}}\left(b_m - a_{mk+1}x_{k+1} - \dots - a_{mn}x_n\right)$$

e la sostituiamo nelle equazioni precedenti.

Vediamo come fare con un esempio:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 5x_5 + x_6 = 0 \\ x_3 + 4x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 - 5x_5 + 0x_6 = 0 \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 5x_5 + x_6 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 + 0x_4 + 4x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

matrice (incompleta):
$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Iniziamo dal basso:
sostituiamo $x_3 = -4x_5 + x_6$ nelle altre equazioni,

$$x_2 = -8x_5 + 2x_6 - 3x_4 + 5x_5 - x_6 = -3x_4 - 3x_5 + x_6$$

$$x_1 = -3x_4 + x_5$$

tutte le soluzioni sono del tipo

$$(-3x_4 + x_5, -3x_4 - 3x_5 + x_6, -4x_5 + x_6, x_4, x_5, x_6)$$

al variare di $x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{R}$

cioè $S = \{(-3s+t, -3s-3t+u, -4t+u, s, t, u) / s,t,u \in \mathbb{R}\}$

Problema: se il sistema non è a scala ??

Si agisce sulle equazioni del sistema con queste 3 operazioni, che danno un sistema equivalente (cioè un altro sistema uno che ha esattamente le stesse soluzioni):

(i) moltiplicare un'equazione per uno scalare non nullo;

(ii) riordinare le equazioni

(iii) sommare ad un'equazione del sistema il multiplo di un'altra equazione.

(Le stesse regole le possiamo applicare direttamente alle righe della matrice completa).

Tramite queste 3 operazioni, possiamo eseguire un algoritmo per ottenere un sistema "a scala" equivalente a quello di partenza, e risolverlo per sostituzione.
Le stesse operazioni corrispondono alle seguenti 3 operazioni sulle righe della matrice completa associata:

(i) moltiplicare una riga per uno scalare non nullo.

(ii) riordinare le righe

(iii) sommare ad una riga il multiplo di un'altra riga.

ALGORITMO DI GAUSS:

Iniziare dalla prima riga:

1. Se $a_{11} \neq 0$ allora moltiplicare la prima riga per a_{11}^{-1}
2. Se $a_{11} = 0$ guardare $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1}$ e prendere il primo $\neq 0$

   2a) Se il primo è $a_{j1} \neq 0$ allora moltiplicare la j-esima riga per $(a_{j1})^{-1}$, poi scambiare la prima con la j-esima riga

   2b) Se sono tutti nulli abbiamo una colonna nulla e passiamo al passo n. 4
3. Ora abbiamo $a_{11} = 1$; sommiamo alla j-esima riga $(a_{j1}) \times$ (j-esima riga), per $j = 2, 3, \dots, m$.

Abbiamo ottenuto la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & * & * & \cdots & \\ 0 & * & \cdots & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

④ Adesso lavoriamo solo sulle righe a destra degli zeri.

ⓐ se la prima colonna è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sono le righe $2, 3, \dots, m$,

ⓑ se la prima colonna è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sono le righe $1, 2, 3, \dots, m$.

⑤ ricominciamo come in ①:

supponiamo di essere nel caso ⓐ: $a_{21} = 0$, guardiamo a_{22},

se $a_{22} \neq 0$ moltiplichiamo la 2^a riga per $(a_{22})^{-1}$, altrimenti

scambiamo la 2^a riga con la j^a riga dove $a_{j2} \neq 0$,

poi moltiplichiamola per $(a_{j2})^{-1}$ ... e così via.

Alla fine si ottiene una matrice a gradini.

<u>ATTENZIONE</u>: in generale questo algoritmo permette di partire da una matrice qualsiasi e ottenere una matrice a gradini. Se la matrice è la matrice di un sistema lineare, le operazioni sono le corrispondenti operazioni che abbiamo descritto per le equazioni del sistema:

queste non cambiano l'insieme delle soluzioni del sistema, quindi il nuovo sistema è "equivalente" al primo.

Eseguendo in diverso modo le stesse operazioni si possono ottenere diversi sistemi a gradini, tutti equivalenti.

es.

$$\begin{cases} x+y-z+w=0 \\ x+2w=0 \\ x-y-z+w=0 \\ x+2y+z+3w=0 \end{cases}$$

è un sistema <u>omogeneo</u>

basta guardare la matrice <u>incompleta</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \underline{II} \\ \underline{I} \\ \underline{III} \\ \underline{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \underline{I} \\ \underline{II}-\underline{I} \\ \underline{III}-\underline{I} \\ \underline{IV}-\underline{I} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \underline{I} \\ \underline{II} \\ \underline{III}+\underline{II} \\ \underline{IV}+2\cdot\underline{II} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \underline{I} \\ \underline{II} \\ -\frac{1}{2}\underline{III} \\ \underline{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \underline{I} \\ \underline{II} \\ \underline{III} \\ \underline{IV}+\underline{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2w=0 \\ y-z-w=0 \\ z+w=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-2w \\ y=z+w = -w+w=0 \\ z=-w \end{cases}$$

<u>Soluzioni</u>: $S=\{(-2t,0,-t,t) \,/\, t\in\mathbb{R}\}$

Osserviamo che secondo l'algoritmo di Gauss, come prima operazione non avremmo dovuto scambiare le prime 2 righe; infatti $a_{11} \neq 0$. Avremmo ottenuto un'altra matrice a gradini, il cui sistema avrebbe le stesse soluzioni; vediamo quale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II-I \\ III-I \\ IV-I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ -II \\ III \\ IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II \\ III+2II \\ IV-II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II \\ -\frac{1}{2} III \\ IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV-3III \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice a gradini con 3 pivots

è diversa da quella ottenuta precedentemente.

il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ y - z - w = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = -2w \\ y = 0 \\ z = -w \end{cases}$$

stesse soluzioni!

Se avessimo avuto un sistema non omogeneo:

$$\begin{cases} x+y-z+w=5 \\ x+2w=4 \\ x-y-z+w=3 \\ x+2y+z+3w=2 \end{cases}$$

avremmo seguito le stesse operazioni ... ma sulla matrice completa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II-I \\ III-I \\ IV-I \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ -II \\ III \\ IV \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II \\ III+2II \\ IV-II \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II \\ -\frac{1}{2}III \\ IV \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV-3III \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

ATTENZIONE: Abbiamo un pivot nella colonna dei termini noti: il sistema non ha soluzioni!!!

infatti il sistema diventa:

$$\begin{cases} x+y-z+w=5 \\ y-z-w=1 \\ z+w=0 \\ 0=-4 \end{cases}$$

Non ci sono soluzioni!

$\boxed{\text{Ex}}$ trovare tutti i $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} x+y-z+w=5 \\ x+2w=4 \\ x-y-z+w=3 \\ x+2y+z+3w=b \end{cases}$$

ammette soluzioni

Questo vale in generale: Teorema (una versione di Rouché-Capelli): Dato un sistema lineare non omogeneo, sia $(A|\underline{b})$ la matrice completa; utilizziamo l'algoritmo di Gauss per ottenere una matrice a gradini. Allora il sistema lineare ammette soluzioni se e solo se non c'è un pivot sulla colonna dei termini noti di questa matrice a gradini. Inoltre, se il sistema ammette soluzioni, queste saranno descritte da tanti parametri quante sono le variabili non-pivot.

Dimostrazione: ⇐ Sappiamo che tramite le operazioni otteniamo un sistema equivalente. Quindi possiamo considerare le soluzioni del sistema associato alla matrice a gradini ottenuta tramite l'algoritmo di Gauss.
Allora se c'è un pivot nella colonna dei termini noti c'è un'equazione del tipo $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$ con $b \neq 0$ e questa chiaramente non ha soluzioni.
Se non c'è un pivot possiamo trovare tutte le soluzioni per sostituzione partendo dal basso, e vediamo anche che le variabili non-pivot fanno da parametri in funzione dei quali esprimiamo le altre variabili. ∎

Un'altra proprietà che abbiamo visto e che vale in generale è la seguente: siano $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ due soluzioni particolari di un sistema lineare con matrice completa $(A \mid \underline{b})$, allora la differenza $(x_1, \dots, x_n) - (y_1, \dots, y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$ è una soluzione del sistema lineare <u>omogeneo</u> associato, di matrice $(A \mid \underline{0})$.

Infatti se $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ verificano le equazioni $a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 + \dots + a_{jn} x_n = b_j$ per $j = 1, \dots, m$ allora $(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ verifica

$$a_{j1}(x_1 - y_1) + \dots + a_{jn}(x_n - y_n) = (a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n) - (a_{j1} y_1 + \dots + a_{jn} y_n) = b_j - b_j = 0$$

per $j = 1, \dots, m$.

<u>ANALOGAMENTE</u>: se $(x_1, \dots, x_n)$ è soluzione del sistema $(A \mid \underline{b})$ e $(z_1, \dots, z_n)$ è soluzione del sistema <u>omogeneo</u> associato $(A \mid \underline{0})$ allora $(x_1, \dots, x_n) + (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + z_1, x_2 + z_2, \dots, x_n + z_n)$ è soluzione del sistema $(A \mid \underline{b})$.

<u>Infatti</u>: se $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j$ e $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} z_i = 0$ per $j = 1, \dots, m$

allora $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} (x_i + z_i) = b_j + 0 = b_j$ per $j = 1, \dots, m$.

Vediamo altri esempi / esercizi:

Studiare al variare del parametro $h \in \mathbb{R}$, il sistema lineare:

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V}
\end{array}
\begin{cases}
2x + (h+1)y - z = 3 \\
3x + (2h-1)y - z = 3 \\
hx + 2hz = -h^2 \\
x + (h-2)y = 0 \\
(1+h)x + (h-2)y + 2hz = -h
\end{cases}
$$

Svolgimento: Osserviamo che a sx del segno "=" abbiamo

$\mathrm{III} + \mathrm{IV} = \mathrm{V}$ quindi se operiamo con $\mathrm{V} - \mathrm{IV} - \mathrm{III}$ otteniamo:

$0 = h^2 - h$, quindi non avremo soluzioni se $h^2 - h \neq 0$.

Verifichiamolo con un sistema a gradini: la matrice completa è

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
2 & h+1 & -1 & 3 \\
3 & 2h-1 & -1 & 3 \\
h & 0 & 2h & -h^2 \\
1 & h-2 & 0 & 0 \\
1+h & h-2 & 2h & -h
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\begin{array}{c}
\mathrm{I}-\mathrm{IV} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V}
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & -1 & 3 \\
3 & 2h-1 & -1 & 3 \\
h & 0 & 2h & -h^2 \\
1 & h-2 & 0 & 0 \\
1+h & h-2 & 2h & -h
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-h\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \\ \mathrm{V}-\mathrm{IV}-\mathrm{III}
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & -1 & 3 \\
0 & 2h-10 & 2 & -6 \\
0 & -3h & 3h & -h^2-3h \\
0 & h-5 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & h^2-h
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ -\mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{IV}
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & -1 & 3 \\
0 & 3h & -3h & h^2+3h \\
0 & h-5 & 1 & -3 \\
0 & 2h-10 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 0 & h^2-h
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \text{A} \\ \\ \\ \text{B} \end{array}
$$

A) Se $h \neq 0$

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \frac{1}{3h}\mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV}-2\cdot\mathrm{III} \\ \frac{1}{h}\mathrm{V}
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & -1 & 3 \\
0 & 1 & -1 & 1+h/3 \\
0 & h-5 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & h-1
\end{array}\right)
\rightsquigarrow
\begin{array}{c}
\mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}-(h-5)\mathrm{II} \\ \mathrm{V} \\ \mathrm{IV}
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 3 & -1 & 3 \\
0 & 1 & -1 & 1+h/3 \\
0 & 0 & h-4 & 2-h-\frac{h}{3}(h-5) \\
0 & 0 & 0 & h-1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

nei casi con $h \neq 0$

Quindi ci sono soluzioni solo se $\boxed{h=1}$ (altrimenti c'è un pivot nei termini noti)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & -3 & 7/3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x+3y-z=3 \\ y-z=4/3 \\ -3z=7/3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z+3-3y = 3-\frac{7}{9}-\frac{15}{9} = \frac{5}{9} \\ y = z+4/3 = 5/9 \\ z=-7/9 \end{cases}$$

Unica soluzione: $\left(\frac{5}{9}, \frac{5}{9}, \frac{-7}{9}\right)$

Verifichiamo che è corretto:

Il sistema con $h=1$

$$\begin{cases} 2x+2y-z=3 & 10/9+10/9-\left(\frac{-7}{9}\right)=3 \ \checkmark \\ 3x+y-z=3 & \checkmark \\ x+2z=-1 & \checkmark \\ x-y=0 & \checkmark \\ 2x-y+2z=-1 & \checkmark \end{cases}$$

OK

l'altro caso:

(B) se $h=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & -10 & 2 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+3y-z=3 \\ -5y+z=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3y+z+3 = 2y \\ z=5y-3 \end{cases}$$

$$S = \{(2t, t, 5t-3) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$ infinite soluzioni.

2 soluzioni particolari: $(0,0,-3)$, $(2,1,2)$ (controllare!)

Attenzione: altra parametrizzazione $y=\frac{1}{5}z+\frac{3}{5} \rightsquigarrow x=\frac{2}{5}z+\frac{6}{5}$

$$S = \left\{\left(\tfrac{6}{5}+\tfrac{2}{5}z, \tfrac{3}{5}+\tfrac{1}{5}z, z\right) / z \in \mathbb{R}\right\}$$

è lo stesso insieme: $z=-3 \rightsquigarrow (0,0,-3)$; $z=2 \rightsquigarrow (2,1,2)$ ///