Capitolo 1 : Numeri Complessi

- Interi e Naturali

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali
- L'affermazione "n è un numero naturale" si scrive $n \in \mathbb{N}$

A partire da $\mathbb{N}$ si possono costruire "tutti" gli insiemi di numeri:

- $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ è l'insieme dei numeri interi

Su questi insiemi di numeri sono definite le operazioni di

somma
$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad (n, m) \longmapsto n+m$$
$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad (h, k) \longmapsto h+k$$

e prodotto
$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad (n, m) \longmapsto n \cdot m$$
$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad (h, k) \longmapsto h \cdot k$$

Inoltre esistono in $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ gli elementi neutri per $+$ e $\cdot$

per ogni naturale o intero n, si ha $n+0=n$ e $n \cdot 1 = n$

Si scrive:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n+0 = n = 0+n$$
$$\forall\, h \in \mathbb{Z}, \quad h \cdot 1 = 1 \cdot h = h, \text{ etc...}$$

$\mathbb{Z}$ ha una proprietà in più rispetto a $\mathbb{N}$: ogni numero ha un opposto: $\forall\, s \in \mathbb{Z} \; \exists!\, t \in \mathbb{Z} \,/\, s+t = 0 = t+s$

Questa cosa non vale per l'operazione di moltiplicazione....

- Razionali

- L'insieme $\mathbb{Q}$, dei numeri razionali, è l'insieme di tutti i numeri del tipo $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Due frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{m'}{n'}$ individuano lo stesso numero se $m \cdot n' = m' \cdot n$. P.es: $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}$

- Questi insiemi sono contenuti uno nell'altro: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- Anche in $\mathbb{Q}$ sono definite le operazioni di somma e prodotto:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{m \cdot n' + m' \cdot n}{n \cdot n'} \quad \text{e} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{m \cdot m'}{n \cdot n'}$$

Proprietà: - commutatività della somma: $\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x + y = y + x$

- associatività della somma: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
- commutatività del prodotto: $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x \cdot y = y \cdot x$
- associatività del prodotto: $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Distributività del prodotto rispetto alla somma:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Q}, \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

- Elemento neutro per la somma: $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x + 0 = x$
- Elemento opposto di un numero razionale:

$$\forall x \in \mathbb{Q} \; \exists! \, y \in \mathbb{Q} \, / \, x + y = 0 \quad \left(\text{se } x = \frac{m}{n}, \; y = \frac{-m}{n}\right)$$

- Elemento neutro per il prodotto: $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x \cdot 1 = x$

- Non è vero che ogni numero razionale ammette un inverso rispetto al prodotto: 0 non ammette inverso, infatti $0 \cdot x = 0 \ \forall x \in \mathbb{Q}$, quindi non esiste $y \,/\, 0 \cdot y = 1$.
- Però è vero che ogni razionale non nullo ammette inverso:

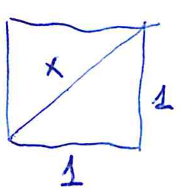
$$\forall x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \quad \exists\, y \in \mathbb{Q} \,/\, x \cdot y = 1$$

Infatti se $x = \frac{m}{n}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ prendiamo $y = \frac{n}{m}$ //

- Un insieme con ~~tt~~ 2 operazioni e tutte queste proprietà è detto un campo. Ci interessano i campi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ dei numeri razionali, reali, complessi_

Problema: i numeri razionali non bastano per risolvere le equazioni polinomiali, né per esprimere tutte le lunghezze: l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$ (provare a dimostrarlo $\boxed{EX}$).

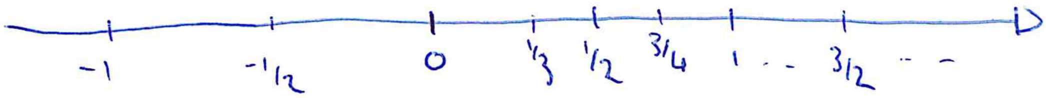
La lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 non si può esprimere come rapporto di lunghezze intere:



$$x^2 = 1 + 1$$

– Reali

Prendiamo una retta, scegliamo un'origine e un'unità di misura, e segniamo tutti i punti a lunghezza razionale:



come visto sopra, non tutti i punti verranno segnati.

È possibile estendere le operazioni di somma e prodotto dei punti razionali a tutta la retta in maniera continua (e unica).

L'insieme dei punti della retta con queste 2 operazioni è il corpo dei numeri reali, denotato $\mathbb{R}$.

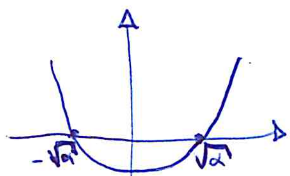
Inclusioni di insiemi di numeri $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Gli elementi di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono detti numeri irrazionali:

es. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, π, e, ...

<u>Problema</u> (difficile): Dato un polinomio $a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, con $a_i \in \mathbb{R}$, trovare le sue radici.

Polinomi con radici: • $X^2 - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \geq 0$



• ogni polinomio di grado dispari: $X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ con n dispari

p. es. $x^3 + 2$

ha radice $-\sqrt[3]{2}$

Ma ci sono polinomi che <u>non</u> hanno radici in $\mathbb{R}$:

ad es. $x^2 + 1$ non ha radici in $\mathbb{R}$, poiché se $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$

Complessi

È possibile estendere il campo $\mathbb{R}$ ad un campo più grande $\mathbb{C}$, in maniera tale che valga il seguente

Teorema (fondamentale dell'algebra):

Ogni equazione polinomiale $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$, con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, ammette una soluzione in $\mathbb{C}$; ossia $\exists\, z \in \mathbb{C} \,/\, a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$.

Def: Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, con le operazioni $+$ e $\cdot$ è definito come segue:

$\mathbb{C}$ come insieme: $\mathbb{C} = \{ (a,b) \,/\, a,b \in \mathbb{R} \}$

Somma di num. complessi: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

Prodotto di num. complessi: $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Il numero reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si identifica al numero $(\alpha, 0) \in \mathbb{C}$, quindi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\boxed{\text{EX}}$ Verificare che $(\alpha,0) + (\beta,0) = (\alpha+\beta, 0)$ e $(\alpha,0)\cdot(\beta,0) = (\alpha\cdot\beta, 0)$

Osservazione: $\forall (a,b) \in \mathbb{C}$, $(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + ((b,0)\cdot(0,1))$

Def: si pone $i = (0,1) \in \mathbb{C}$

Si ha $(i)^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1 \in \mathbb{R}$

Identificando $(a,0) = a \in \mathbb{R}$ e $(0,1) = i \in \mathbb{C}$ abbiamo quindi

$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists!\, a,b \in \mathbb{R} \,/\, z = a + bi$, cioè $\mathbb{C} = \{ a + bi \,/\, a,b \in \mathbb{R} \}$

La scrittura $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ si dice <u>forma algebrica</u> di z

$\boxed{\text{EX}}$ Trovare la forma algebrica di $z = \frac{-1}{2}(3+2i)(1+i)(5-4i)$

<u>Soluzione</u>: Usare la proprietà distributiva e $i^2 = -1$,

$$z = \frac{-1}{2}(3+2i)(5+4+5i-4i) = \frac{-1}{2}(3+2i)(9+i) =$$

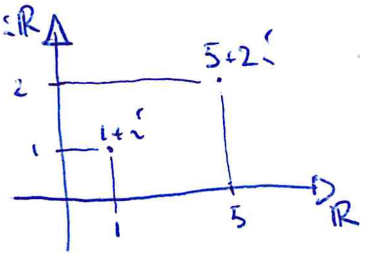
$$= -\frac{1}{2}(27-2+18i+3i) = -\frac{1}{2}(25+21i) = \frac{-25}{2} + \left(\frac{-21}{2}\right)i$$

<u>Def</u>: Sia $z \in \mathbb{C}$ con forma alg. $z = a + bi$, si dice che a è la parte ~~immaginaria~~ reale di z e b la sua parte immaginaria, e si denota $a = \mathrm{Re}(z)$ e $b = \mathrm{Im}(z)$. $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$

<u>Oss</u>: Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora

- $z = \mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z = \mathrm{Im}(z) \cdot i \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$ in questo caso si dice che z è un numero immaginario puro. L'insieme di immaginari puri è $i\mathbb{R}$
- L'unico numero reale che sia anche puramente immaginario è 0, infatti $0 = i \cdot 0$

Come i numeri reali si rappresentano su di una retta, i numeri complessi si rappresentano su un piano:



Questo piano viene chiamato piano complesso, o piano di Argand-Gauss.

La somma di vettori nel piano complesso corrisponde alla somma di numeri complessi: