COGNOME:..
NOME:..
MATRICOLA:....................................

SEGNALI E SISTEMI
Quarto Appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
9 FEBBRAIO 2024
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Si consideri il sistema LTI, causale, a tempo continuo, descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$y'''(t) + y''(t) + 25y'(t) + 25y(t) = x''(t) - 4x(t)$$

1. Trovare la funzione di trasferimento [1 punto]
2. Dire se il sistema è BIBO stabile, giustificando la risposta [2 punto]
3. Trovare la risposta impulsiva [2 punti]
4. Dire se l'ingresso $x(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$ (con $u(t)$ gradino unitario) genera un'uscita forzata limitata. Giustificare la risposta [2 punti]

Soluzione

1. $$H(s) = \frac{s^2 - 4}{s^3 + s^2 + 25s + 25} = \frac{(s+2)(s-2)}{(s^2+25)(s+1)}$$
2. $H(s)$ è strettamente propria; i poli sono $s_1 = -1$ e $s_{2,3} = \pm j5$. Poichè non tutti i poli hanno parte reale negativa, il sistema non è BIBO stabile.
3. Per calcolare l'antitrasformata di $H(s)$ si procede all'estrazione dei poli
$$H(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2 + 25}$$
$$A = lim_{s \to -1}(s+1)H(s) = -\frac{3}{26}$$
il secondo fratto si trova per differenza tra $H(s)$ e il fratto appena estratto
$$\frac{Bs + C}{s^2 + 25} = \frac{29}{26} \cdot \frac{s}{s^2 + 5^2} - \frac{29}{130} \cdot \frac{5}{s^2 + 5^2}$$
da cui, antitrasformando
$$h(t) = \left[-\frac{3}{26} e^{-t} + \frac{29}{26} \cos(5t) - \frac{29}{130} \sin(5t) \right] \cdot u(t)$$

4. l'ingresso $x(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$ ha trasformata di Laplace

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 25}$$

per cui la risposta forzata risulta

$$Y_f(s) = H(s)X(s) = \frac{s(s+2)(s-2)}{(s^2+25)^2(s+1)}$$

in cui i poli instabili $\pm j5$ hanno molteplicità due, generando quindi un'uscita divergente.

Esercizio 2 – [punti 7]

Dato il segnale

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{t}{2}) + 5\,\cos(\omega_0 t)$$

1. Trovare la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ [1 punto].
2. Il segnale viene campionato con passo $T_s = 1s$. Dire per quali valori di ω_0 il segnale può essere ricostruito esattamente dai campioni mediante filtro interpolatore ideale, ovvero con guadagno 1 in banda passante e pulsazione di taglio $\omega_s/2 = \pi$ [3 punti].
3. Dato $\omega_0 = \frac{3}{2}\pi$, dire che segnale viene ricosruito dai campioni mediante filtro interpolatore ideale [3 punti].

Soluzione

1. $$X(j\omega) = \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{\pi}) + 5\pi\,\delta(\omega - \omega_0) + 5\pi\,\delta(\omega + \omega_0)$$

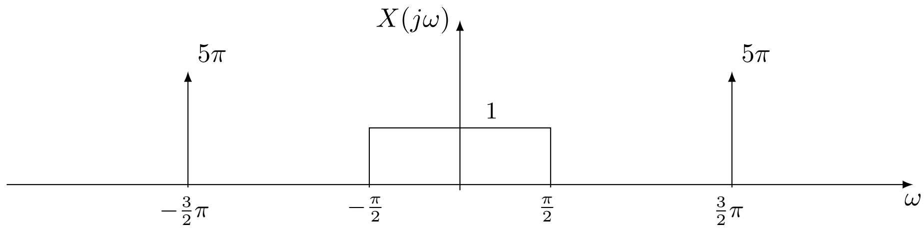
   in cui il rect ha estensione $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed i delta sono posizionati a $\pm\omega_0$.

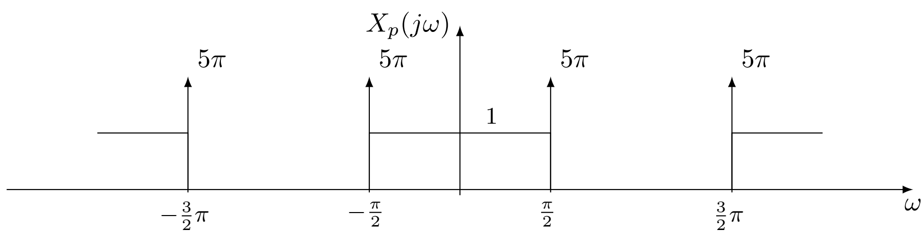
2. La massima pulsazione è

   $$\omega_M = 2\pi B = \max(\tfrac{\pi}{2}, \omega_0)$$

   Secondo il teorema di Shannon, per poter ricostruire esattamente il segnale dai campioni, è necessario campionare con pulsazione $\omega_s = 2\pi > 2\omega_M$. Perciò deve essere $\omega_M < \pi$. La condizione è verificata se $\omega_0 < \pi$. Si ottiene lo stesso risultato anche usando usando la regola alternativa $T_s = 1 < \frac{1}{2B}$, $2B = \max(\frac{\pi}{2}, \omega_0)/\pi$.

3. Essendo $\omega_0 > \pi$ siamo in presenza di aliasing. $X_p(j\omega) = \mathrm{rep}_{2\pi}\, X(j\omega)$ è mostrato in figura.





Quindi all'uscita del filtro interpolatore ideale si avrà

$$X_r(j\omega) = \text{rect}(\tfrac{\omega}{\pi}) + 5\pi\delta(\omega - \tfrac{\pi}{2}) + 5\pi\delta(\omega + \tfrac{\pi}{2})$$

e pertanto il segnale riscostruito è

$$x_r(t) = \tfrac{1}{2}\text{sinc}(\tfrac{t}{2}) + 5\,\cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$

Esercizio 3 – [punti 7]

Dato il sistema discreto descritto dall'equazione

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)\, 3^{k-n} - 3x(n+1)$$

si dica se è: istantaneo (statico), causale, lineare, tempo invariante, BIBO stabile, giustificando le risposte [1 punto per ogni richiesta]. Si calcoli inoltre l'uscita se in ingresso viene posto il gradino $x(n) = u(n) = 1$, $n \geq 0$ e 0 altrove [2 punti].

Soluzione Va inizialmente notato che il sistema è un sistema convoluzionale che i può scrivere nella forma

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)\, 3^{k-n} = x * h(n)$$

con $h(n) = u(n)\, 3^{-n}$, assolutamente sommabile. Quindi, il sistema: non è istantaneo, è causale, è lineare, è tempo invariante, è BIBO stabile. L'uscita, nel caso di gradino unitario in ingresso, risulta $y(n) = 0$ per $n < 0$, mentre per $n \geq 0$ si ha

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} 3^{k-n} = \sum_{m=0}^{n} 3^{-m} = \frac{1 - 3^{-(n+1)}}{1 - \frac{1}{3}} = \tfrac{3}{2}(1 - 3^{-(n+1)})$$

Esercizio 4 – [punti 3]

Dato il segnale a tempo discreto

$$x(n) = e^{j\frac{1}{4}n} - je^{-j\frac{4}{3}n} + \tfrac{3}{5}\sin(\tfrac{\pi}{2}n) - 2$$

1. Dire se è periodico e giustificare la risposta [1 punto].
2. Il segnale è posto in ingresso ad un filtro con risposta in frequenza $H(e^{j\theta}) = \cos(\theta)$. Trovare l'uscita del filtro [2 punti].

Soluzione

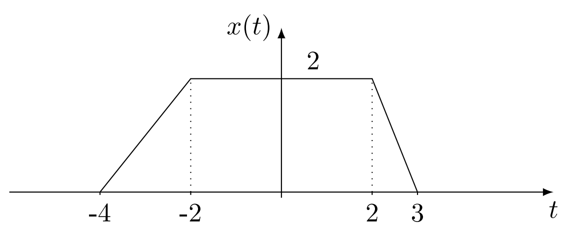
1. Le fasi $\frac{1}{4}$ e $-\frac{4}{3}$ non sono in rapporto razionale con 2π, perciò il segnale non è periodico.
2. Per la proprietà di autofunzione dell'esponenziale complesso, l'uscita del filtro è

$$\begin{aligned} y(n) &= \cos(\tfrac{1}{4})\, e^{j\frac{1}{4}n} - \cos(\tfrac{-4}{3})\, je^{-j\frac{4}{3}n} + \tfrac{3}{5}\cos(\tfrac{\pi}{2})\sin(\tfrac{\pi}{2}n) - 2\cos(0) \\ &= \cos(\tfrac{1}{4})\, e^{j\frac{1}{4}n} - \cos(\tfrac{4}{3})\, je^{-j\frac{4}{3}n} - 2 \end{aligned}$$

   poichè $\cos(\pi/2) = 0$ e $\cos(0) = 1$

Esercizio 5 – [punti 3]

Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale



Soluzione Valutando la derivata del segnale

$$y(t) = x'(t) = \text{rect}(\tfrac{1}{2}(t+3)) - 2\text{rect}(t - \tfrac{5}{2})$$

si ottiene

$$Y(j\omega) = 2\,\text{sinc}(\tfrac{\omega}{\pi})e^{j3\omega} - 2\,\text{sinc}(\tfrac{\omega}{2\pi})e^{-j\frac{5}{2}\omega}$$

da cui

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} = \frac{2\,\text{sinc}(\frac{\omega}{\pi})e^{j3\omega} - 2\,\text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})e^{-j\frac{5}{2}\omega}}{j\omega}$$

senza impulsi aggiuntivi in quanto il valor medio del $y(t)$ segnale è nullo.

Esercizio 6 – [punti 3]

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, collezionati con passo di campionamento `T`, siano contenuti nel vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e le pulsazioni associate, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

Soluzione Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
omx = (0:Nx-1)*2*pi/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
semilogy(omx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```