Ingegneria Meccanica – Fisica Generale 1 – **CANALE 2**

Prova del 8 Febbraio 2024 – Prof. Merano, Giubilato

Matricola: Cognome: Nome:

- <u>Non si consegnano i fogli di brutta</u>
- Fogli senza matricola, cognome e nome non saranno considerati validi
- Si può utilizzare il solo formulario e la calcolatrice non programmabile
- La presenza di qualsiasi altro testo, documento, foglio, strumento,… **invaliderà la prova**
- Le risposte alle DOMANDE sono considerate valide se viene indicata la risposta esatta, **<u>e la scelta è correttamente giustificata nello spazio libero sottostante alla domanda stessa</u>**.
- Le <u>DOMANDE</u> con **risposta corretta** valgono **2 punti**, le domande **senza risposta 0 punti**, le domande **errate** incorrono in una penalizzazione di **-0.5 punti**.
- Gli <u>ESERCIZI</u> vanno svolti con ordine, e **i risultati giustificati analiticamente**. Risultati numericamente o algebricamente corretti, ma mancanti dei passaggi necessari a giustificarli, non verranno considerati validi.

Formulario

Costanti

$g_0 \cong 9.81\ \frac{m}{s^2}$	$G \cong 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$		
$M_\oplus \cong 5.972 \times 10^{24}\ kg$	$R_\oplus \cong 6.4 \times 10^6\ m$	$M_\odot \cong 1.989 \times 10^{30}\ kg$	
$\rho_{H_2O} \cong 1 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$	$\rho_{air} \cong 1.25 \frac{kg}{m^3}$	$\mu_{H_2O} \cong 0.864 \times 10^{-3} Pa\ s$	
$c \cong 3 \times 10^8\ \frac{m}{s}$	$q_0 \cong 1.6 \times 10^{-19}\ C$	$\varepsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$	$\mu_0 \cong 1.256 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$
$m_e \cong 9.01 \cdot 10^{-31}\ kg$	$m_p \cong 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$		

Cinematica, dinamica, lavoro ed energia del punto materiale

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$	$\mathbf{a}_C = -\omega^2 \mathrm{r}\, \boldsymbol{u}_r = -\frac{v^2}{r}\boldsymbol{u}_r$	
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + \frac{dm}{dt}$	$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$
$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \qquad \frac{dW}{dt} = P$	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_g = mgh$	$E_e = \frac{1}{2}kx^2$

Gravitazione

$\boldsymbol{F} = G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{u}_r$	$U = G\frac{Mm}{r}$		

Momenti

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$	

Moti armonici

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$T_{molla} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_{pendolo} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dinamica, lavoro ed energia del corpo rigido

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \sum \boldsymbol{r}_i m_i / \sum m_i$$

$$I = \sum {r_i}^2 m_i$$

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$I = \acute{I} + mr^2$$

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM}$$

$$E_{kr} = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m{v_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$$

$$I_{asta} = \frac{1}{12}ml^2$$

$$I_{anello} = mr^2$$

$$I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I_{sfera} = \frac{2}{5}mr^2$$

Meccanica e dinamica dei fluidi incomprimibili

$$F_A = \rho V g$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = k$$

$$Av = cost$$

$$Re = \frac{\rho}{\mu}Lv_r = \frac{L}{\nu}v_r$$

$$F_{lmn} = 6\pi r\mu v$$

Elettrostatica

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

$$\boldsymbol{E}_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

$$V_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Campi

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

$$V = \int -\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dr} + k$$

$$\phi_\Sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$C_\Gamma(\boldsymbol{E}) = \iint_\Sigma (\nabla \times \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{d\Sigma}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r$$

$$\boldsymbol{E}_{anello} = \frac{\lambda R y}{2\varepsilon_0 (R^2 + y^2)^{3/2}}\boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{E}_{piano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{E}_{sup.\ cond.} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$$

Capacità, condensatori

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

$$C_{piano} = \frac{A}{d}\varepsilon_0$$

$$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$C_{par} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$\frac{1}{C_{ser}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

1) [2 **pt**] Domanda 1

Un corpo di massa *m* si muove di moto armonico su un piano orizzontale liscio perché collegato ad una molla di costante elastica *k*. Sapendo che il moto del corpo è descritto dalla seguente legge oraria: $x(t) = a\ \cos(\omega_0 \cdot t) + b\sin(\omega_0 \cdot t)$, quanto vale la fase iniziale dell'oscillazione?

1) $\sqrt{a^2 + b^2}$
2) $arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$
3) $\frac{k}{m}$
4) $k \cdot m$
5) ω_0

2) [2 **pt**] Domanda 2

Il piatto di un giradischi ruota alla velocità di 45 giri/minuto. Qual è la velocità angolare ω del giradischi?

1) 180°/minuto
2) $2\pi/s$
3) 360°/minuto
4) $\frac{3}{2}\pi/s$
5) 270°/minuto

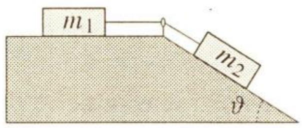
3) [2 **pt**] Domanda 3

Un'auto di massa 1000 kg è inizialmente in quiete su una strada orizzontale. Ad essa viene applicata una forza $\vec{F}_1$ di modulo 200 N nella direzione della strada per 20 s. Sapendo che nello stesso tempo sull'auto si esercita anche una forza di attrito orizzontale $\vec{F}_2$ di modulo 65 N, quanto vale la velocità dell'auto dopo i 20 s.

1) 2.7 m/s
2) 5.3 m/s
3) 1.4 m/s
4) 6.6 m/s
5) 4 m/s

4) [2 **pt**] Domanda 4

In assenza di attriti, quanto vale la reazione del piano sul corpo di massa m_1 disegnato qui a fianco?



1) $Nulla$
2) $m_1 g$
3) $(m_1 - m_2)g$
4) $(m_1 - m_2 \cos\vartheta)g$
5) $(m_1 - m_2 \sin\vartheta)g$

5) [2 **pt**] Domanda 5

Un corpo di massa m si trova ad una quota z rispetto al suolo. Sapendo che la sua energia potenziale vale $m{\cdot}g{\cdot}z$, a quale potenziale gravitazionale si trova il corpo?

1) $g{\cdot}z$
2) $m{\cdot}g$
3) $m{\cdot}g{\cdot}z^2$
4) $g{\cdot}z^2$
5) g

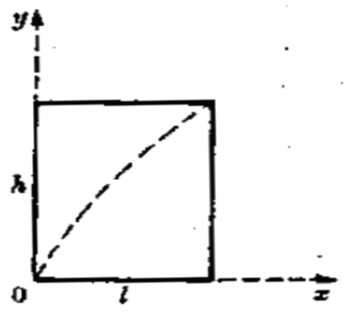
6) [2 **pt**] Domanda 6

Un filo ideale carico con densità di carica $\lambda\ [C/m]$ attraversa un volume cubico avente lato a. Sapendo che il flusso del campo elettrico misurato attraverso la superficie del volume cubico in esame è pari a $\phi(\boldsymbol{E}) = \sqrt{3}\frac{\lambda a}{\epsilon_0}$, determinare la posizione del filo rispetto al volume stesso.

1) Il filo corre in coincidenza con uno spigolo del volume.
2) Il filo “entra” nel volume dal centro di una faccia, e “esce” dal centro della faccia opposta.
3) Il filo corre su di una faccia, “entrando” a metà di un lato e “uscendo” a metà del lato opposto.
4) Il filo “entra” da uno spigolo del volume, ed “esce” dallo spigolo opposto.
5) Il filo “entra a metà di uno spigolo, ed “esce”.

7) [**8 pt**] Esercizio 1

Il moto di caduta di un corpo viene osservato da una persona attraverso una finestra di altezza h = 1.8 m e larghezza l = 1.2 m; la distanza della persona dalla finestra è grande rispetto a h e l. Il corpo appare alla persona esattamente nell'angolo superiore destro e scompare nell'angolo inferiore sinistro in un tempo τ = 0.15 s. Il corpo è stato lanciato dal basso, ha raggiunto il suo punto più alto e la persona lo vede in caduta.



1) [1pt] Qual è la velocità del corpo lungo l'asse *x* nell'istante in cui esso appare nell'angolo superiore destro?
2) [2pt] Qual è la velocità del corpo lungo l'asse *y* nell'istante in cui esso appare nell'angolo superiore destro?
3) [2pt] Quanto tempo è trascorso tra l'istante in cui il corpo si trovava nel punto più alto della sua traiettoria e quello in cui appare nell'angolo superiore destro?
4) [3pt] Quali sono le coordinate x_M e y_M del punto più alto della traiettoria del corpo?

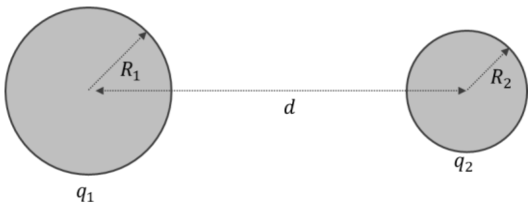
8) [**6 pt**] Esercizio 2

Una sfera omogenea di raggio R = 10 cm e massa m = 10 kg rotola senza scivolare su un piano orizzontale e la frequenza di rotazione su sé stessa è f = 3 giri/s.

1) [3pt] Quanto vale la sua energia cinetica?
2) [3pt] Che lavoro si deve fare per aumentare la sua frequenza di rotazione al valore f = 6 giri/s?

9) [**7 pt**] Esercizio 3

Due sfere di diametro $R_1 = 27\ mm$ e $R_2 = 18\ mm$ sono poste ad una distanza $d = 270\ mm$; le sfere sono cariche con carica $q_1 = 3\ nC$ e $q_2 = 1\ nC$ rispettivamente. Ad un certo momento, le due sfere vengono connesse da un filo ideale, senza essere spostate. Trascurando gli effetti di mutua induzione (assumiamo $R_1, R_2 \ll d$), determinare:



1) [3pt] L'energia totale del sistema prima che le sfere vengano connesse.
2) [2pt] La carica presente su ognuna delle sfere, dopo che sono state connesse.
3) [2pt] Come varia l'energia tra prima e dopo la connessione? Si può dirlo a priori, senza effettuare calcoli?

Svolgimento

Svolgimento

Svolgimento

Soluzioni

1) Domanda 1

La fase iniziale è un angolo ed è quindi adimensionale. L'unica quantità adimensionale è la 2) che è anche la giusta espressione della fase iniziale.

2) Domanda 2

Un giro corrisponde ad un angolo di $2\pi\, rad$. In un minuto il disco compie $45 \cdot 2\pi\, rad$. In un secondo ne compirà $\frac{45 \cdot 2\pi}{60} = \frac{3}{2}\pi$. Si ha quindi $\omega = \frac{3}{2}\pi/s$.

3) Domanda 3

Si applica il teorema dell'impulso. Le forze sono applicate per un tempo $\Delta t = 20\, s$ e sono l'una l'opposta dell'altra. Abbiamo quindi $\frac{(200-65)\Delta t}{m} = v = 2.7\, m/s$.

4) Domanda 4

La reazione del piano vale $m_1 g$.

5) Domanda 5

Per definizione di potenziale gravitazionale (vedi il Bettini) la risposta corretta è $g \cdot z$

6) Domanda 6

Per il teorema di Gauss, il flusso attraverso la superficie del parallelepipedo sarà proporzionale alla carica contenuta nel volume dello stesso: $\phi(\boldsymbol{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} = \lambda \frac{l}{\epsilon_0}$. L'unica condizione per cui la lunghezza del filo all'interno del volume è pari a $l = \sqrt{3}a$ è che il filo entri da uno spigolo, ed esca da quello opposto; dal teorema di Pitagora risulta infatti: $l = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$, da cui la soluzione.

7) Esercizio 1

Possiamo svolgere l'esercizio considerando che le componenti del moto orizzontale e verticale sono completamente indipendenti tra loro.

1) Lungo l'asse delle x siamo in presenza di un moto rettilineo uniforme. Si ha posizione finale meno posizione iniziale uguale a velocità per τ
$$x_f - x_i = v_x\tau \rightarrow 0 - 1.2 = v_x\tau \rightarrow -\frac{1.2}{0.15} = v_x = -8\, m/s$$
Dove il segno meno indica che il verso della velocità è opposto al verso dell'asse delle x.
2) Lungo l'asse delle y siamo in presenza di un moto rettilineo uniformemente accelerato. Si ha:
$$y_f - y_i = -\frac{1}{2}g\tau^2 + v_y\tau \rightarrow -1.8 = -0.11 + 0.15v_y = \rightarrow v_y = -11.27\, m/s$$
3) Nel punto più alto della traiettoria il corpo ha $v_y = 0$. Quando appare nell'angolo superiore destro della finestra, la velocità è quella del punto precedente. Essendo quello lungo l'asse delle y un moto uniformemente accelerato si ha: $v_{yf} - v_{yi} = -gt \rightarrow \frac{v_{yf}-v_{yi}}{-g} = t \rightarrow \frac{-11.27-0}{-9.81} = t = 1.15\, s.$
4) $x_M = l + |v_x|t = 10.4\, m;\quad y_M = h + \frac{1}{2}gt^2 = 8.29\, m.$

8) Esercizio 2

1) L'espressione dell'energia cinetica per la sfera che rotola senza scivolare è $E_{kin} = \frac{1}{2}I_{CM}(2\pi f)^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2$ dove $I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{2}{5}10(0.1)^2 = 4\cdot 10^{-2}\, kg\, m^2$ è il momento di inerzia della sfera rispetto ad un asse passante per il suo centro e $v_{CM} = 2\pi f R = 1.88\, m/s$ è il modulo della velocità del suo centro di massa. Si ha $E_{kin} = \frac{14\,\pi^2}{5}mR^2f^2 = 24.8\, J$
2) Se la f raddoppia l'energia cinetica si moltiplica per 4 per cui ad una frequenza di 6 giri/s corrisponde una $E_{kin2} = 99.2\, J$. Il lavoro fatto per aumentare la frequenza a 6 giri/s sarà dato da $W = E_{kin2} - E_{kin} = 99.2 - 24.8 = 74.4\, J$

9) Esercizio 3

L'energia totale del sistema è data dalla carica presente su ognuna delle sfere (capacità intrinseca della sfera), più l'energia potenziale dovuta all'interazione delle sfere stesse (assunte come cariche puntiformi in quanto la mutua induzione è trascurabile). Le sfere hanno capacità:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \cong 3\cdot 10^{-12}\, F,\quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 \cong 2\cdot 10^{-12}\, F$$

L'energia presente sulle sfere risulta quindi:

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{{q_1}^2}{C_1} = \frac{{q_1}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} \cong \frac{(3\cdot 10^{-9})^2}{6\ \cdot 10^{-12}} \cong 1.5\cdot 10^{-6}\, J,$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\frac{{q_2}^2}{C_2} = \frac{{q_2}^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} \cong \frac{(1\cdot 10^{-9})^2}{4\ \cdot 10^{-12}} \cong 2.5\cdot 10^{-7}\, J$$

L'energia dovuta all'interazione reciproca infine risulta:

$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} \cong \frac{3\cdot 10^{-9}\cdot 1\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8.85\ \cdot 10^{-12}\cdot 0.27} \cong 1\cdot 10^{-7}\, J$$

L'energia totale del sistema è quindi:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_{12} \cong 1.5 \cdot 10^{-6} + 2.5 \cdot 10^{-7} + 1 \cdot 10^{-7} = 1.85 \cdot 10^{-6}\,J$$

Dopo che le sfere vengono connesse, la carica si ridistribuisce tra le stesse, rimanendo invariata in totale. Inoltre, il potenziale dovrà ora essere V', identico per le due sfere. Le capacità delle sfere non variano, il che permette di scrivere:

$$\begin{cases} V' = \dfrac{q_1{}'}{C_1} = \dfrac{q_2{}'}{C_2} \\ Q = q_1{}' + q_2{}' = q_1 + q_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova:

$$q_1{}' = C_1 \frac{Q - q_1{}'}{C_2} \rightarrow q_1{}' = Q\frac{C_1}{C_1 + C_2} = (q_1 + q_2)\frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

Numericamente si trova:

$$q_1{}' = (3\,nC + 1\,nC)\frac{27}{27 + 18} \cong 2.4\,nC, \quad q_2{}' = (q_1 + q_2) - q_1{}' = 1.6\,nC$$

Il nuovo potenziale delle sfere è quindi:

$$V' = \frac{q_1{}'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2{}'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \cong 799\,V$$

La nuova energia del sistema sarà:

$$U' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2){V'}^2 + \frac{q_1{}' q_2{}'}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{1}{2}(5\,pF)\,799 + \frac{2.6\,nC\;1.6\,nC}{4\pi\varepsilon_0\;0.27} \cong 1.72 \cdot 10^{-6}\,J$$

Come atteso essa sarà minore, in quanto il sistema si porta al livello energetico più basso.