Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 9/2/2024

Esercizio 1 (10 punti) Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$ ed $f \in C^\infty(A)$ la funzione

$$f(x, y) = x + \beta y^2 - \log(x + y), \quad (x, y) \in A.$$

Al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f e discuterne la natura.

Risposte. Punti critici:	Natura:

Esercizio 2 (12 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y} + \log y \\ y(0) = 1/2. \end{cases}$$

i) Studiare l'esistenza di una soluzione $y \in C^1(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$.

ii) Provare che la soluzione massimale $x \mapsto y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

iii) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione (la convessità non è richiesta).

iv) Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x}.$$

Risposte: iii) Grafico:	iv) $L =$

Esercizio 3 (10 punti) Consideriamo l'insieme di funzioni $X = \{f \in C([0, 1]) : |f(x)| \leq x \text{ per } x \in [0, 1]\}$. Al variare del parametro $\alpha \in [0, 2]$ discutere l'esistenza di una soluzione $f \in X$ dell'equazione

$$\arcsin\big(f(x)\big) = \alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{x^2}{3}, \quad x \in [0, 1].$$

Risposte:

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = x + \beta y^2 - \log(x+y), \quad (x,y) \in A.$$

Al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ calcolare tutti i punti critici di f e discuterne la natura.

Risoluzione. Derivate prime

$$f_x = 1 - \frac{1}{x+y},$$

$$f_y = 2\beta y - \frac{1}{x+y}.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x+y} = 0 \\ 2\beta y - \dfrac{1}{x+y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\beta y = 1$$

Se $\beta = 0$ non c'è soluzione e dunque non ci sono punti critici. Se $\beta \neq 0$ si trova $y = 1/2\beta$.

Sostituendo in $x+y=1$ si trova $x = 1 - \dfrac{1}{2\beta}$.

C'è un solo punto critico

$$\left(1 - \frac{1}{2\beta}, \frac{1}{2\beta}\right), \quad \beta \neq 0.$$

Esercizio. Si consideri il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log y + \dfrac{x}{y} \\ y(0) = 1/2 . \end{cases}$$

i) Studiare l'esistenza di una soluzione locale;

ii) Studiare l'esistenza di una soluzione globale;

iii) Tracciare un grafico qualitativo della soluzione (convessità non richieste)

iv) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$.

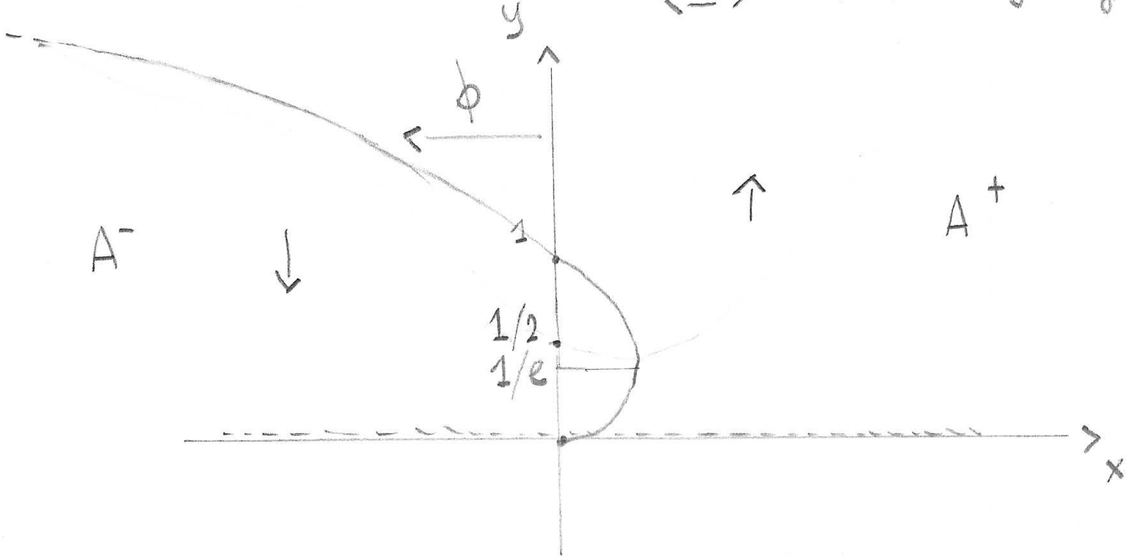
Soluzione. La funzione $f(x,y) = \log y + \dfrac{x}{y}$ è definita su $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y>0\}$ ed $f \in C^\infty(A)$.

In particolare, f è loc. di Lipschitz in y.

Dunque esistono $\delta > 0$ ed $y \in C^1(-\delta,\delta)$ soluzione del Problema.

Studiamo $f(x,y) > 0 \iff y \log y + x > 0$

$\iff x > - y \log y = \phi(y)$



Dunque y cresce in $A^+ = \{x > \phi(y)\}$ mentre decresce in $A^- = \{x < \phi(y)\}$.

Osserviamo che $(0, 1/2) \in A^-$ e dunque y decresce in un intorno di $x=0$.

Dalla forma di $x = \phi(y)$ vediamo che la soluzione y deve attraversare il grafico $x = \phi(y)$ in un punto $\bar{x} > 0$. Per $x > \bar{x}$ la soluzione non può rientrare in A^- e quindi rimane crescente.

Per $x < 0$ la soluzione non può intersecare la curva $x = \phi(y)$. Quindi rimane "intrappolata" nella regione A^-. Deduciamo che la soluzione massimale è definita fino $x = -\infty$.

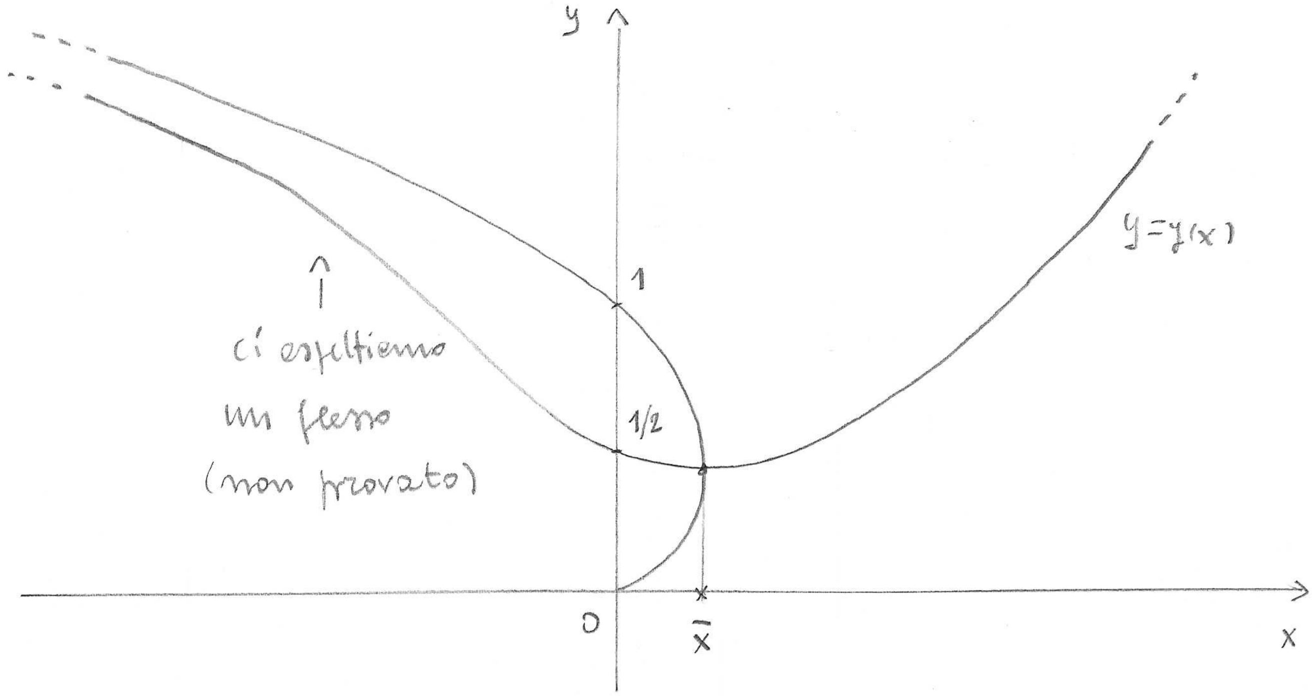
Nel punto $\bar{x} > 0$, la soluzione ha un minimo assoluto: $y(x) \geq y(\bar{x})$ per ogni x nel dominio.

Per $\bar{x} \leq x \leq M$ si ha dunque

$$|f(x,y)| \leq |\log y| + \frac{M}{y(\bar{x})}$$

$$\leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{finita}}}{C}(1 + |y|) \quad \forall y \geq y(\bar{x})$$

Deduciamo che la soluzione massimale è definita fino ad $x = +\infty$.



Il limite $L = \lim_{x\to\infty} y(x) \in [y(\bar{x}), \infty]$ esiste per monotonia. Se fosse $L < \infty$ troveremmo

$$\lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\log y + \frac{x}{y}\right) = +\infty$$

che è assurdo. Quindi $L = +\infty$.
Definitivamente si ha $y(x) \geq e$ e dunque $y'(x) \geq 1$ per $x \geq \bar{\bar{x}}$. Questo implica che $y(x) \geq y(\bar{\bar{x}}) + x - \bar{\bar{x}}$. A sua volta questo implica che $y'(x) \geq \log x + C_1$ e per integrazione $y(x) \geq x\log x - x + C_2$ definitivamente. Si deduce che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} \geq \lim_{x\to\infty}\left(\log x - 1 + \frac{C_2}{x}\right) = +\infty ,$$

Esercizio Consideriamo l'insieme di funzioni

$X = \{ f \in C([0,1]) : |f(x)| \le x \text{ per } x \in [0,1] \}$.

Al variare del parametro $\alpha \in [0,2]$ discutere l'esistenza di una soluzione $f \in X$ dell'equazione

$$\arcsin(f(x)) = \alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{1}{3} x^2, \qquad x \in [0,1].$$

Risoluzione. Riscriviamo l'equazione in questo modo:

$$f(x) = \sin\left(\alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{1}{3} x^2\right) := Tf(x).$$

Vediamo se $T : X \to X$ è ben definita:

$$|Tf(x)| = \left|\sin\left(\alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{1}{3} x^2\right)\right|$$

$$\le \left| \alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{1}{3} x^2 \right|$$

$$\overset{(=)}{\le} \alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{1}{3} x^2$$

$$\le \alpha \int_0^x t^2 dt + \frac{1}{3} x^2 = \frac{\alpha}{3} x^3 + \frac{1}{3} x^2$$

$$\overset{0 \le x \le 1}{\le} \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{3} \overset{\alpha \le 2}{\le} 1.$$

Quindi T è ben-definita.

Vediamo se $T : X \to X$ è una contrazione (rispetto a $\|\cdot\|_\infty$, norma del sup)

Per $f, g \in X$ abbiamo

$$|Tf(x) - Tg(x)| = \Big| \sin\Big(\alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{1}{3}x^2\Big) - \sin\Big(\alpha \int_0^x g(t)^2 dt + \frac{1}{3}x^2\Big)\Big|$$

sin è 1-Lip

$$\leq \Big| \alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \cancel{\frac{1}{3}x^2} - \alpha \int_0^x g(t)^2 dt - \cancel{\frac{1}{3}x^2} \Big|$$

$$\leq \alpha \int_0^x | f(t)^2 - g(t)^2 | dt$$

$$\leq \alpha \| f - g\|_\infty \cdot \int_0^x (\underbrace{|f(t)|}_{\leq t} + \underbrace{|g(t)|}_{\leq t}) dt$$

$$\leq \alpha \| f - g\|_\infty \int_0^x 2t\, dt = \alpha x^2 \| f - g\|_\infty$$

Segue che $\| Tf - Tg \|_\infty \leq \alpha \| f - g\|_\infty$.

Se $0 \leq \alpha < 1$ allora $T: X \to X$ è una contrazione su X che è completo. Quindi esiste un unico punto fisso, che sarà la soluzione (unica) dell'equazione.

Discutiamo il caso $1 \leq \alpha \leq 2$. Osserviamo che X è convesso ed è limitato. Inoltre è chiuso rispetto alla convergenza uniforme. Mostriamo che $\overline{T(X)} \subset X$ è compatto. Se $f \in X$ allora

esiste $(Tf)'(x) = \cos\Big(\alpha \int_0^x f(t)^2 dt + \frac{1}{3}x^2\Big) \cdot \Big\{ \alpha f(x)^2 + \frac{2}{3}x \Big\}$

e quindi $|(Tf)'(x)| \leq \alpha + \frac{2}{3}$. Dunque $T(X)$ è "equilipschitziana"

Dal Teorema di Ascoli-Arzelà segue che $\overline{T(X)} \subset X$ è compatto. Inoltre $T: X \to X$ è continua, ovvero:

$$f_n \underset{n \to \infty}{\overset{[0,1]}{\rightrightarrows}} f \implies Tf_n \underset{n \to \infty}{\overset{[0,1]}{\rightrightarrows}} Tf.$$

Per il Teorema di Schauder, T ha un punto fisso su X. Perciò esiste almeno una soluzione dell'equazione anche per $\alpha \in [1,2]$.