# Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 5/2/2024

---

**Esercizio 1** (10 punti) In $\mathbb{R}^2$ si consideri la forma differenziale

$$\omega = y^2(x-y)dx + x^2(x+y)dy.$$

i) Stabilire se $\omega$ è esatta su $\mathbb{R}^2$ ed eventualmente calcolarne un potenziale.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega,$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è la circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

| Risposte: i) $\omega$ esatta si/no | ii) $I =$ |
|---|---|

**Esercizio 2** (10 punti) Si consideri l'insieme $M \subset \mathbb{R}^3$

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 2\}.$$

i) Stabilire se $M$ è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ oppure no.

ii) Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$, assume massimo su $M$ oppure no ed eventualmente calcolarlo.

| Risposte: i) $M$ sottovarietà si/no | ; ii) $\max_M f =$ |
|---|---|

**Esercizio 3** (10 punti) Si consideri l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro. Studiare la convergenza e se possibile calcolare il seguente integrale

$$I_\alpha = \int_S \varphi(x, y, z) d\mathscr{H}^2.$$

| Risposta: $I_\alpha =$ |
|---|

---

2 ore e 30 minuti a disposizione

<u>Esercizio</u> Si consideri l'insieme $S \subset \mathbb{R}^3$

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z = 0 \}.$$

Sia poi $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Studiare la convergenza e se possibile calcolare il seguente integrale

$$I_\alpha = \int_S \varphi(x,y,z)\, dH^2 .$$

Risoluzione. La superficie $S$ è il grafico della funzione

$$g(x,y) = -xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Per la formula dell'area

$$I_\alpha = \int_S \varphi \, dH^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y,g(x,y)) \sqrt{1+|\nabla g(x,y)|^2}\, dx\,dy$$

dove $\nabla g = (-y,-x)$ e $\sqrt{1+|\nabla g|^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$,

Dunque

$$I_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}-\alpha} dx\,dy \overset{\substack{\text{Coord.}\\ \text{polari}}}{=} 2\pi \int_0^\infty (1+r^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\, r\,dr$$

e quindi

$$I_\alpha = \pi \left[ \frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}-\alpha}}{\frac{3}{2}-\alpha} \right]_{r=0}^{r=\infty} \qquad \left(\text{se } \alpha \neq \tfrac{3}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{\pi}{\alpha - 3/2} & \text{se } \alpha > \frac{3}{2} \end{cases},$$

Quando $\alpha = 3/2$ :

$$I_\alpha = 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{1+r^2}\, dr = \pi \left[ \log(1+r^2) \right]_{r=0}^{r=\infty}$$

$$= +\infty .$$

$\square$

Esercizio Sia $M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+2xyz = 2 \}$.

i) Stabilire se $M \subset \mathbb{R}^3$ è una sottovarietà differenziabile

ii) Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y+z$, ha massimo su $M$ ed eventualmente calcolarlo.

i) Consideriamo la funzione definiente $g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2xyz-2 .$$

Le sue derivate parziali sono:

$$g_x = 2x+2yz ,$$

$$g_y = 2y+2xz ,$$

$$g_z = 2z+2xy .$$

Il sistema $\nabla g(x,y,z) = 0$ fornisce:

$$\begin{cases} x+yz=0 \\ y+xz=0 \\ z+xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{"} \\ y-yz^2=0 \\ z-zy^2=0 \end{cases}$$

La terza equazione $z(1-y^2)=0$ fornisce $z=0$ oppure $y=\pm 1$.

Ma $z=0 \Rightarrow x=y=0$ ($1^a$ e $2^a$ eq.). Si trova il punto $0=(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ e tuttavia $0 \notin M$.

Se $y=\pm 1$ la seconda equazione dà $z=-1$ e $z=1$ (entrambe), se $y=\pm 1$ la prima equazione dà $x=\mp z$.

Dunque si trovano i punti $(-1,1,1)$, $(1,-1,1)$ per $y=+1$, mentre per $y=-1$ si trovano $(1,-1,1)$, $(-1,-1,-1)$

In tutti questi punti: $g = 3-2-2 = -1 \neq 0$ e dunque non sono in $M$, Conclusione: $M$ è sottovarietà.

ii) Con $z=-1$ l'equazione $x^2+y^2+z^2+2xyz=2$ diventa
$x^2+y^2-2xy=1$ ovvero $(x-y)^2=1$.

Dunque $(x, x-1, -1) \in M \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

In questi punti:

$$f(x, x-1, -1) = x + x - 1 - 1 = 2x - 2$$

Deduciamo che $\sup_M f = +\infty$.

$\square$