Correzione dell'esame di Calcolo Numerico per Matematica
A.A. 2023-24

prof. S. De Marchi, dott. G. Elefante

primo appello: 24 gennaio 2024

1 Ricerca di zeri di funzione

Esercizio
Data l'equazione $f(x) = 0$ con

$$f(x) = e^{-x} - \sin(\pi x) - 1$$

si ricavi

- l'equivalente problema di punto fisso convergente e la funzione g di punto fisso convergente;
- la terza iterata del metodo di punto fisso partendo dal valore iniziale $x_0 = 0.5$.

Correzione Per ricavare il problema di punto fisso convergente (almeno localmente) equivalente al problema di ricerca dello zero c di $f(x)$, si può andare ad isolare la x dalla formulazione $f(x) = 0$, ricavando quindi il problema $g(x) = x$. Nel far questo si dovrà ricercare la g tale che si abbia $|g'(c)| < 1$, da cui si avrà convergenza locale del metodo di punto fisso.
In questo caso abbiamo che si nota subito che $c = 0$ (in caso contrario si poteva utilizzare il comando `fzero` di Matlab) e la funzione di punto fisso convergente è

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(e^{-x} - 1\right),$$

in quanto

$$|g'(0)| = \frac{1}{\pi} < 1.$$

Per cui, se $x_0 = 0.5$ si avrà che $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$ e

$$x_3 = g(x_2) = -0.0137.$$

2 Algebra Lineare Numerica

Esercizio
Dati

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 21 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 24 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Si decomponga A usando un'opportuna decomposizione deducibile dalla struttura di A.
- Risolvere il sistema $Ax = b$, usando la decomposizione appena calcolata.

Correzione La matrice A è chiaramente simmetrica, per cui, per utilizzare la decomposizione di Cholesky, si vuole controllare che sia definita positiva. Andando a controllare gli autovalori di A con il comando Matlab `eig` si può notare che sono tutti positivi, per cui la matrice è simmetrica e definita positiva e si può utilizzare la decomposizione di Cholesky.
Per dimostrare che la matrice è definita positiva si poteva anche dimostrare che il prodotto

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

è maggiore di 0 se $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \neq 0$. Infatti svolgendo il prodotto si ha che è

$$4x_1 - 4x_1x_3 + 4x_1x_4 + 8x_2x_3 + 2x_3x_4 + 21x_3^2 3x_4^2 + x_2^2$$

che si può riscrivere come

$$2(x_1 - x_3)^2 + 2(x_1 + x_4)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + 2x_3^2$$

che è positiva finché gli x_i sono diversi da 0.
La decomposizione di Cholesky di A è L^tL con

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per cui per risolvere il sistema $Ax = b$ usando la decomposizione di Cholesky si andrà a risolvere prima il problema $L^tc = b$ con il meg e in seguito, sempre con il meg, il sistema $Lx = c$.

Per cui

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3 Interpolazione e approssimazione di funzioni

Esercizio
Si considerino le seguenti coppie di valori relativi ad una funzione f e i corrispondenti valori perturbati $\tilde{f}$

$$\begin{array}{cccc} f & (-1,2) & (0,5) & (1,-1) \\ \tilde{f} & (-1,1.7) & (0,4.7) & (1,-1.3). \end{array}$$

Si dia quindi una stima dal basso della costante di Lebesgue usando la stima dell'errore tra il polinomio interpolante f e il polinomio interpolante $\tilde{f}$ nell'intervallo individuato da dati.

Correzione Si noti che $\|f - \tilde{f}\| = 0.3$. Inoltre, scrivendo i polinomi interpolanti in forma di Lagrange, si ha

$$P_n[f] - P_n[\tilde{f}] = \sum_i f_i \ell_i(x) - \sum_i \tilde{f}_i \ell_i(x) = \sum_i (f_i - \tilde{f}_i)\ell_i(x) = 0.3 \sum_i \ell_i(x).$$

Ma

$$\sum_i \ell_i(x) \equiv 1,$$

per cui $\|P_n[f] - P_n[\tilde{f}]\| = 0.3$ e

$$1 = \frac{\|P_n[f] - P_n[\tilde{f}]\|}{\|f - \tilde{f}\| = 0.3} \leq \Lambda_n.$$

4 Quadratura

Esercizio
Si trovino i valori dei pesi a, b, c della seguente formula di quadratura

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = af\left(\frac{1}{2}\right) + bf\left(\frac{3}{5}\right) + cf\left(\frac{3}{2}\right),$$

affinché sia esatta per polinomi di grado minore o uguale a 2.

Correzione Si consideri la base dello spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 $\{v_0(x) = 1, v_1(x) = x, v_2(x) = x^2\}$.
Per trovare i pesi a, b, c affinché la formula sia esatta per i polinomi di grado minore o uguale a 2, si richiede che

$$a\, v_i(1/2) + b\, v_i(3/5) + c\, v_i(3/2) = \int_0^2 v_i(x)\mathrm{d}x$$

per $i = 0, 1, 2$.
Da cui si ricava il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 3/5 & 3/2 \\ 1/4 & 9/25 & 9/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

che ha per soluzione

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -50/27 \\ 32/27 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.6667 \\ -1.8519 \\ 1.1852 \end{pmatrix}.$$

---

5 Matlab

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ed un insieme di n punti $X_n = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, è possibile approssimare tale funzione con un polinomio p interpolante la funzione in quei punti, detti nodi, ovvero soddisfacente la relazione

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Inoltre, nel caso si cerchi un polinomio di grado $n-1$, dati n nodi distinti, allora il polinomio soddisfacente tale relazione esiste ed è unico.
Un possibile insieme di punti utilizzabili come nodi (ma meno preferibili) sono i punti equispaziati (in un intervallo generico $[a, b]$)

$$x_i^e = a + \frac{(b-a)}{n-1} \cdot i, \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

ma, a causa del loro mal condizionamento, è preferibile utilizzare punti come quelli di Chebyshev-Lobatto (definiti qui in $[-1, 1]$)

$$x_i^{cl} = \cos\left(\frac{i}{n-1}\pi\right), \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Si sottolinea che l'ultimo insieme di punti è definito nell'intervallo $[-1, 1]$, ma per spostarli in un generico intervallo $[a, b]$ è sufficiente effettuare la trasformazione

$$y = (x+1) \cdot \frac{b-a}{2} + a.$$

A partire dalla funzione **equi_pts.m**, si costruisca la funzione **CL_pts.m**, che costruisce n punti di Chebyshev-Lobatto in un generico intervallo $[a, b]$. I parametri, `a`, `b` e `n` saranno dati in input e in output dovrà esserci il solo vettore `x` contenente gli n punti.
In seguito, si scriva uno script denominato **CognomeNome_matricola.m** dove utilizzare la funzione appena creata e quella data.
In particolare, si richiedere di definire nell'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$ un vettore di 200 punti equispaziati denominato `x_eval` (che sarà utilizzato in seguito), e la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

che vorremo approssimare attraverso dei polinomi interpolanti.
Si generino 10 punti per entrambi gli insiemi di punti definiti sopra (attraverso la function creata e quella data) e si faccia un plot limitando lo spazio al rettangolo $[-1, 1] \times [-2, 2]$, dove disegnare i punti appena generati in righe diverse (un insieme di punti sulla retta $y = 1$ e uno sulla retta $y = -1$), ovvero andando a disegnare i punti

$$(x_i^e, 1), \qquad (x_i^{cl}, -1).$$

Si chiede, in aggiunta, che i vari insiemi di punti siano disegnati attraverso dei cerchi e utilizzando un colore differente per ciascun insieme di punti differente. Si aggiunga, inoltre, una legenda e una griglia al grafico.
In seguito, considerando un numero di punti che va da `n=1` a `n=Nmax`, con `Nmax=25`, si generi, per ciascun n, i polinomi interpolanti sui n nodi equispaziati e n di Chebyshev-Lobatto e si valutino, poi, i due polinomi sui punti contenuti nel vettore `x_eval` (ad esempio, attraverso i comandi `polyfit` e `polyval`).
Per ciascun n si calcoli inoltre l'errore assoluto massimo tra le valutazioni di ciascun polinomio di grado $n-1$ sul vettore `x_eval` e il valore esatto di f sui punti contenuti in tale vettore e si immagazzinino tali valori su due vettori `errE`, `errCL`, uno per ciascun polinomio interpolante sui due insiemi di punti (rispettivamente equispaziati e Chebyshev-Lobatto). Ciascun elemento di tali vettori sarà quindi l'errore assoluto del polinomio di grado $n - 1$ con la funzione.
Infine, si faccia il grafico, in scala semilogaritmica, dei due errori dei polinomi relativi ad insiemi di punti diversi, entrambi sovrapposti nello stesso grafico e dati in funzione di n. Si richiede di disegnarli in due colori diversi e utilizzando come stile grafico il cerchietto collegato da una linea. Si aggiunga la legenda al grafico.

Correzione: File allegati.