Analisi Matematica 2A

Nome, cognome, matricola: Scritto del 23/1/2024

Esercizio 1 (12 punti) Dato un parametro reale $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{\sin|x| - \sin|y|}{\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right|^{\alpha}}, \qquad \text{se } |x| \neq |y|,$$

ed $f(x,y) = 0$ quando $|x| = |y|$.

i) Provare che per $\alpha \geq 2$ la funzione f non è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) Provare che per $\alpha \leq 1$ la funzione f è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iii) Studiare la continuità di f in 0 per $\alpha \in (1,2)$.

Risposte: iii) per $\alpha \in (1,2)$ la funzione f è continua in 0: si/no. NO

Esercizio 2 (12 punti) Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(1/2 + x^2 + y^2\right) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

i) Studiare l'esistenza di una soluzione $y \in C^1(-\delta,\delta)$, $\delta > 0$, e le sue proprietà di simmetria.

ii) Provare che la soluzione massimale $x \mapsto y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

iii) Calcolare il limite $L_1 = \lim_{x\to\infty} y(x)$.

iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione.

v) Calcolare il limite

$$L_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x \log y(x)}{y(x)}.$$

Risposte: i) simmetria: dispari iii) $L_1 =$ $+\infty$ v) $L_2 =$ $1/2$

Esercizio 3 (8 punti) Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \left(x + y^5, y - x^7\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

ii) Stabilire se F è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}^2$.

Risposte: i) F diffeomorfismo locale si/no ii) F diffeomorfismo globale si/no

2 ore e 30 minuti a disposizione

Esercizio Dato un parametro $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{|\sin|x| - \sin|y||}{|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}|^{\alpha}} \quad \text{per } x \neq y$$

ed $f(x,y) = 0$ per $x = y$.

i) Provare che f non è continua in 0 per $\alpha \geq 2$.
ii) Provare che f è continua in 0 per $\alpha \leq 1$.
iii) Discutere la continuità in 0 per $\alpha \in (1,2)$.

Risoluzione i) Per $y = 0$ si ha:

$$f(x,0) = \frac{|\sin|x||}{|x|^{\alpha/2}} \quad \text{con} \quad \lim_{x \to 0} \frac{|\sin|x||}{|x|^{\alpha/2}} = \begin{cases} 0 & \frac{\alpha}{2} < 1 \\ 1 & \frac{\alpha}{2} = 1 \\ +\infty & \frac{\alpha}{2} > 1 \end{cases}$$

Deduciamo che f non è continua in 0 per $\alpha \geq 2$, essendo $f(0) = 0$.

ii) Per il Teorema di Lagrange

$$\circledast \qquad \big|\sin|x| - \sin|y|\big| = \big||x| - |y|\big| \, |\cos\xi| \quad \text{con } \xi \in [|x|, |y|]$$

$$\leq \big||x| - |y|\big|$$

Dunque

$$0 \leq f(x,y) \leq \frac{\big||x| - |y|\big|}{\big|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\big|^{\alpha}} = \frac{\big||x| - |y|\big|}{\big||x| - |y|\big|^{\alpha}} \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^{\alpha}$$

ovvero

$$0 \leq f(x,y) \leq \big|\,|x|-|y|\,\big|^{1-\alpha}\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\alpha} \underset{\text{per } 1-\alpha\geq 0}{\leq} \underbrace{\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\alpha}}_{}\ \overset{0}{\uparrow} \text{ per } x,y\to 0$$

Per confronto, se $0<\alpha\leq 1$ si deduce che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0).$$

Dunque: $\alpha \leq 1 \Rightarrow f$ continua in 0.

iii) Notiamo che in ✻ possiamo supporre $|\cos\xi| \geq \frac{1}{2}$ perché $\xi \to 0$. Dunque:

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}\,\big|\,|x|-|y|\,\big|^{1-\alpha}\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\alpha}.$$

Scegliamo $x>0$ e $y>0$ e precisamente $y = x + x^{\beta}$ dove $\beta>0$ è da discutere. Si ha

$$f(x, x+x^{\beta}) \geq \frac{1}{2}\, x^{\beta(1-\alpha)} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}}$$

Se $\beta(1-\alpha)+\frac{\alpha}{2} < 0$ allora $\lim_{x\to 0^+} f(x,x+x^{\beta}) = +\infty$

ed f non è continua in 0. La condizione è

$$\beta - \alpha\beta + \frac{\alpha}{2} < 0 \iff \beta < \alpha\left(\beta-\frac{1}{2}\right) \overset{\beta>1/2}{\iff} \alpha > \frac{\beta}{\beta-1/2}$$

Ma $\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\beta}{\beta-1/2} = 1$ e dunque:

$$\alpha > 1 \Rightarrow f \text{ non continua in } 0.$$

$\square$

Esercizio   Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(\frac{1}{2} + x^2 + y^2\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

i) Studiare l'esistenza locale di una soluzione $y \in C^1(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, e discutere le sue simmetrie.

ii) Provare che la soluzione massimale è definita per $x \in \mathbb{R}$.

iii) Calcolare il limite $\lim_{x \to +\infty} y(x)$.

iv) Disegnare un grafico qualitativo della soluzione

v) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \log y(x)}{y(x)}.$$

Risoluzione. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \log\left(\frac{1}{2} + x^2 + y^2\right)$ verifica $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dunque f è loc. di Lipschitz in y. Segue che esiste unica $y \in C^1(-\delta, \delta)$, per $\delta > 0$, la soluzione del Problema di Cauchy.

Sia $z(x) = -y(-x)$. Chiaramente $z(0) = -y(0) = 0$.

Inoltre

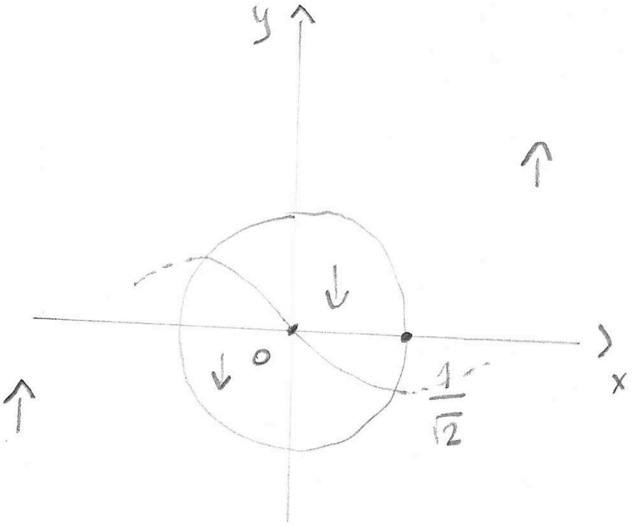
$$z'(x) = y'(-x) = \log\left(\frac{1}{2} + (-x)^2 + (y(-x))^2\right)$$
$$= \log\left(\frac{1}{2} + x^2 + z(x)^2\right)$$

Per unicità della soluzione del PC deve essere $z = y$, ovvero y è dispari.

Abbiamo $f(x,y)>0 \iff \frac{1}{2}+x^2+x^2>1 \iff x^2+y^2>\frac{1}{2}$.

Dunque:

- Nella regione $x^2+y^2>\frac{1}{2}$, la soluzione cresce;
- Nella regione $x^2+y^2<\frac{1}{2}$ la soluzione decresce.



Se $|x|\leq M<\infty$ allora

$$|f(x,y)| \leq \left|\log\left(\frac{1}{2}+M^2+y^2\right)\right|$$

$$\leq C(1+|y|) \qquad \forall y\in\mathbb{R}$$

con $C=C(M)$.

Per il criterio sulle soluzioni globali, la soluzione y è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Abbiamo anche $y'(x)\geqslant \log x^2 = 2\log x$

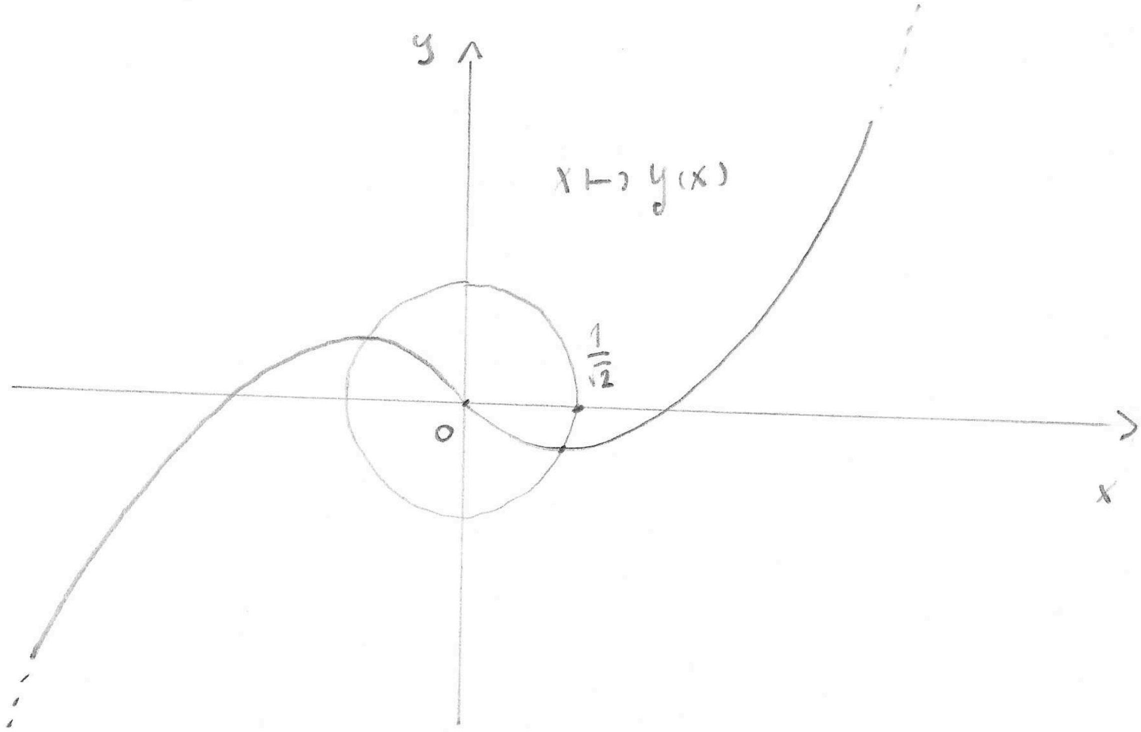
e dunque

$$y(x) \geq y(1)+\int_1^x 2\log t\,dt \overset{\text{per parti}}{=} y(1)+2(x\log x+x-1)$$

Per confronto:

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$$

Grafico qualitativo della soluzione:



Con il teorema di Hospital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{y}{\log y}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{y'\log y - y\frac{1}{y}y'}{(\log y)^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\log y)^2}{(\log y - 1)\,y'} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\log y)^2}{(\log y - 1)\log\left(\frac{1}{2}+x^2+y^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log y}{\log\left[y^2\left(1+\frac{1/2+x^2}{y^2}\right)\right]} = \lim \frac{\log y}{2\log y + \log\left(1+\frac{1/2+x^2}{y^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$\square$

per quanto visto sopra $\to 0$

<u>Esercizio</u> Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \left(x + y^5 , y - x^7 \right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

i) Stabilire se F è un diffeomorfismo locale

ii) Stabilire se F è un diffeomorfismo da $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}^2$.

Risoluzione. i) La matrice Jacobiana di F è

$$JF(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 5y^4 \\ -7x^6 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \det JF(x,y) &= 1 - (-7x^6)\, 5y^4 \\ &= 1 + 35x^6y^4 \geq 1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Per il teorema di invertibilità locale F è un diffeomorfismo locale di classe C^∞.

ii) Dato $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$ studiamo il sistema di equazioni $F(x,y) = (\xi,\eta)$ ovvero

$$\begin{cases} x + y^5 = \xi \\ y - x^7 = \eta \end{cases}$$

Ricavando x nella prima e sostituendo nella seconda $x = \xi - y^5$ si trova

$$\varphi(y) := y - (\xi - y^5)^7 = \eta$$

Osserviamo che

$$\lim_{y \to \pm\infty} \varphi(y) = \pm\infty .$$

Inoltre

$$\varphi'(y) = 1 - 7(\xi - y^5)^6 \cdot (-5y^4)$$

$$= 1 + 35 (\xi - y^5)^6 y^4 \geq 1 > 0 .$$

Dunque φ è strettamente crescente.

Conclusione: per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ fissato $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è 1-1 e su, quindi, per ogni $\eta \in \mathbb{R}$ esiste un'unica $y \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi(y) = \eta$.

Anche la $x \in \mathbb{R}$ è determinata in modo unico.

Quindi

$$F : \mathbb{R}^2 \underset{su}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbb{R}^2 .$$

Siccome è già un diffeomorfismo locale di classe C^∞ segue che $F^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$, ovvero F è un diffeomorfismo globale.

$\square$