Lezione 20 (12 gennaio 2024)

Es 1

Determinare a e b affinché il grado di precisione (o di esattezza) della formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq a\, f\left(\frac{1}{3}\right) + b\, f\left(\frac{2}{5}\right)$$

sia massimo. Usare la predetta formula per calcolare $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$

Sostituiamo ad f, $\{1, x\}$ essendo due i coefficienti da determinare

$$\begin{cases} a + b = \int_0^1 dx = 1 \\ a\left(\frac{1}{3}\right) + b\left(\frac{2}{5}\right) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Risolvendolo troviamo $a = -\frac{3}{2}$ $\quad b = \frac{5}{2}$

È il grado massimo?

Proviamo a sostituire f con x^2, avremo

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

con la formula $\quad \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 = -\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{9}_3} + \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{25}_5}$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{2}{5} = \frac{-5+12}{30} = \frac{7}{30}$$

Applicando la formula al calcolo $\int_0^1 \sin(\pi x)\, dx$

$$-\frac{3}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \frac{5}{2}\left(\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right)\right) \simeq 1.08$$

La primitiva è

$$-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big]_0^1 = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi) + \frac{1}{\pi}\cos(0)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

Es 2

Determinare il grado di esattezza di

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0)$$

Applicare la formula al calcolo $\int_0^1 e^x\, dx$

Osserviamo che la formula è nota, sostituiamo via via $1, x, x^2, \ldots$

$f = 1$ $\quad \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 0 = 1 = \int_0^1 dx$ ✓

$f = x$ $\quad \cancel{\frac{2}{3}\cdot 0} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = \int_0^1 x\, dx$ ✓

$f = x^2$ $\qquad \cancel{0} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \cancel{\frac{1}{6} \cdot 0} = \int_0^1 x^2 \, dx$ ✓

$f = x^3$ $\qquad 0 + \frac{1}{3} + 0 \neq \int_0^1 x^3 \, dx$ NO

Conclusione la formula ha grado di esattezza 2

Ora sia $f(x) = e^x$ $\qquad \int_0^1 e^x \, dx = e - 1 \simeq 1.7172$

applicando la formula

$$\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot e + \frac{1}{6} \approx 1.7394$$

3 esercizi su cui esercitarsi

Esercizio 1 $\quad$ Costruire una formula di N-C a 3 punti di tipo aperto

$$\int_{-2h}^{2h} f(x) \, dx \approx w_1 f(-h) + w_2 f(0) + w_3 f(h)$$

Nota: questa formula è nota come formula di MILNE

Supp: determinare w_i, chiedendo l'esattezza su $1, x, x^2$

Esercizio 2 $\quad$ Data $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad x \in [0, 1]$

- determinare p_2, polinomio di grado 2 che interpola f in $[0,1]$ su nodi equispaziati ($\{0, \frac{1}{2}, 1\}$)

- dare una maggiorazione dell'errore d'interpolazione
- approssimare $\int_0^1 f(x)\,dx$ con $\int_0^1 p_2(x)\,dx$

e calcolarne l'errore assoluto

Esercizio 3

Determinare l'ordine di esattezza della formula di quadratura di tipo interpolatorio

$$\int_0^4 f(x)\,dx \simeq w_1 f(1) + w_2 f(2) + w_3 f(3)$$

Come maggiorare l'errore di quadratura

Partiamo dal calcolo

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

con un errore a meno di $tol = 0.5 \cdot 10^{-3}$

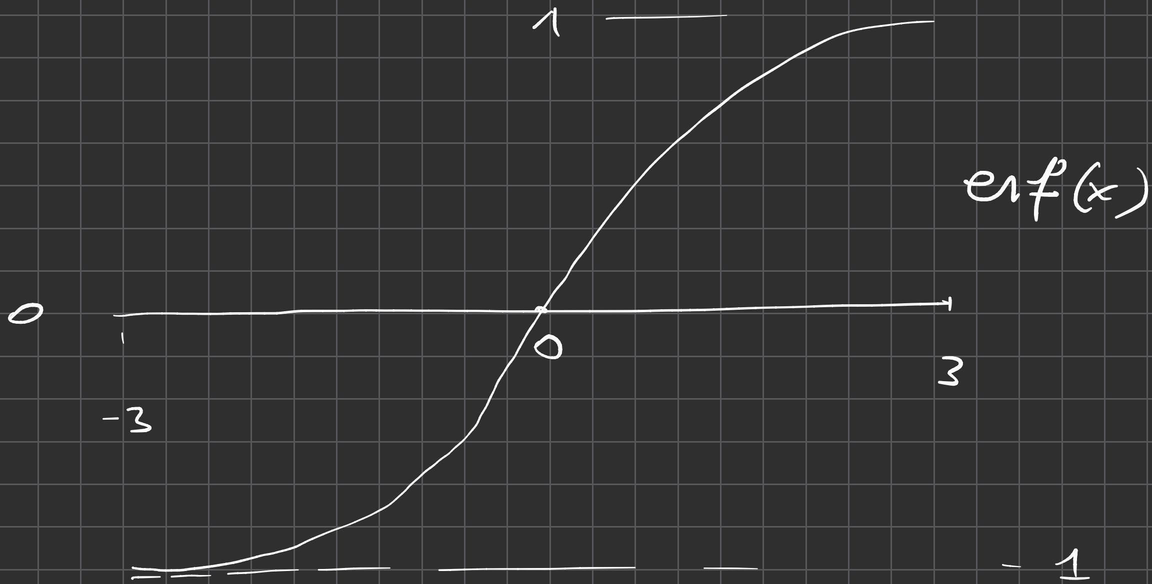
Osservo che l'integrale dato si può esprimere mediante "la funzione errore"

IN MATLAB erf

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

quindi

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(1) \approx 0.747$$



Partiamo con $n = 1$

$$R_1(f) = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi)$$

affinché $|R_1(f)| < tol$

$$|R_1(f)| \leq \frac{h^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| < tol$$

Nella fattispecie $f(x) = e^{-x^2}$

$f''(x) = 2(2x^2 - 1)\, e^{-x^2}$ è strett. crescente in $[0,1]$ e per $x = 0$ assume il valore minimo, -2 mentre per $x = 1$ assume il valore $2/e < 1$

$$\Longrightarrow \max_{x \in [0,1]} \left| 2(2x^2-1)e^{-x^2} \right| = 2$$

Dalla formula dell'errore con $n = 1$

$$J_2 = \int_0^1 t(t-1)\,dt = -\frac{1}{6}$$

$$|R_1| = \left| \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \cdot 1^3 \right| = 0.1\bar{6} > tol$$

Approssimare l'integrale dato con la formula dei trapezi a meno di $tol = 0.5\,10^{-3}$ non è possibile perché la stima dell'errore è maggiore di tol.

<u>$n = 2$</u> Provate che anche con $n = 2$ non funziona. Si otterrà

$$|R_2| \simeq 4 \cdot 10^{-3} > tol$$

Si scoprirà che per approssimare l'integrale a meno di tol è necessario $n = 4$

$$|R_4| \simeq 6 \cdot 10^{-5} < tol$$

Purtroppo le formule interpolatorie su punti equispaziati NON CONVERGONO perché, partendo da $n=8$ alcuni pesi di COTES sono negativi

$n=8$	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
	$\frac{3956}{14175}$	$\frac{23552}{14175}$	$-\frac{3712}{14175}$	$\frac{41984}{14175}$	$-\frac{18160}{14175}$

<u>Domanda</u> : come possiamo costruire formule convergenti?

<u>Risposta</u> : devono avere <u>pesi positivi</u> e limitati

FORMULE COMPOSITE o GENERALIZZATE

Dato $[a,b]$, lo suddividiamo in N sottointervalli con punti equispaziati

$$x_k \qquad k=0,\dots,N \qquad x_0=a, \quad x_N=b$$

Per l'additività dell'integrale

$$\int_{a=x_0}^{b=x_N} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$$

Chiamo $I_k = [x_k, x_{k+1}]$

Su ciascuno degli I_i applico una formula di N-C di grado basso.

Indicato con $I_k^n(f)$ il valore dell'integrale sul k-esimo sottointervallo

$$I_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} I_k^n(f)$$

I casi che discutiamo sono per $n=1,2$ che corrispondono al metodo dei trapezi composito e al metodo di Simpson composito, rispettivamente.

NB: il metodo dei trapezi composito si dice anche FORMULA TRAPEZOIDALE

$n=1$

Su ogni $I_k = [x_k, x_{k+1}]$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$+ \dots + \frac{h}{2}\left[f(x_{N-1})+f(x_N)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_N)\right] + h\sum_{k=1}^{N-1} f(x_k)}_{\text{formula trapezoidale}}$$

$n=2$

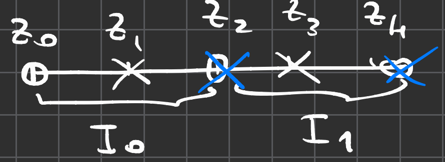
Su ogni $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ applico Simpson

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_k) + 4f\Big(\underbrace{\frac{x_k+x_{k+1}}{2}}_{x_k'}\Big) + f(x_{k+1})\right]$$

$$h = \frac{b-a}{2N}$$

Possiamo rinominare i punti di quadratura

$z_k \qquad k=0,\dots,2N$



$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\Big[f(\underset{a}{z_0}) + 4f(z_1) + 2f(z_2) + 4f(z_3) + \dots + 4f(z_{2N-1}) + f(\underset{b}{z_{2N}})\Big]$$

sui punti con indice dispari avremo il coefficiente 4, sui punti con indice pari avremo il coefficiente 2 eccetto z_0 e z_N che appaiono solo una volta e hanno coeff. 1

Errore di quadratura composita

Sia $f \in \mathcal{C}^s[a,b]$. L'errore sul k-esimo intervallino sia

$$r_n^{(k)} = \gamma_n h^{s+1} \frac{f^{(s)}(\xi_k)}{s!}$$

$$\xi_k \in (x_k, x_{k+1}) \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

Allora

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{N-1} r_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_n h^{s+1} \frac{f^{(s)}(\xi_k)}{s!}$$

$$= \gamma_n \frac{h^{s+1}}{s!} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(s)}(\xi_k)$$

Ora $f \in \mathcal{C}^s[a,b]$, $\exists \xi$ t.c. $\sum_{k=0}^{N-1} f^{(s)}(\xi_k) = N f^{(s)}(\xi)$

da cui si ha

$$R_n(f) = \gamma_n N \frac{f^{(s)}(\xi)}{s!} h^{s+1} = \gamma_n \cancel{N} \frac{f^{(s)}(\xi)}{s!} \frac{(b-a)^{s+1}}{N^{s+\cancel{1}}}$$

$$= \gamma_n \frac{(b-a)^{s+1}}{N^s} \frac{f^{(s)}(\xi)}{s!}$$

Casi $n = 1, 2$

$$\boxed{\begin{aligned} R_1(f) &= -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi) && \text{TRAPEZOIDALE} \\ R_2(f) &= -\frac{(b-a)^5}{2880\, N^4} f^{(4)}(\xi) && \text{SIMPSON} \end{aligned}}$$

Ricordando che N dipende da n allora

$$\lim_{N \to +\infty} |R_N(f)| = 0$$

Ovvero, fissato $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un N t.c. $|R_N| < \varepsilon$

Per esempio

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \qquad tol = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

- trapezoidale $\qquad \max_{x \in [0,1]} |f''| = 2$

$$|R_1(f)| < 1/(6N^2)$$

affinché $\dfrac{1}{6N^2} < 0.5 \cdot 10^{-3}$

$$\Longrightarrow \quad N^2 > \frac{1}{6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}} = \frac{10^3}{3}$$

$$N > \left[\sqrt{\frac{1000}{3}} \right]$$

$\hookrightarrow$ parte intera

$$N > 19$$

pertanto dobbiamo prendere come minimo 20 punti per approssimare $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$ a meno della tolleranza $tol = \frac{1}{2} 10^{-3}$

Se usiamo SIMPSON

$$|R_2(f)| < \frac{12}{2880 N^4} \qquad 12 = \max_{x \in [0,1]} |f^{(4)}|$$

$$N = 2$$

ovvero ci servono 5 punti

Per casa

Trovare il numero minimo di sottointervalli N per approssimare a meno di $tol = 10^{-4}$ con la formula trapezoidale i seguenti integrali

1) $$\int_0^5 \frac{1}{1+(x-\pi)^2}\,dx$$

2) $$\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$$

La maggiorazione dell'errore è

$$\frac{(b-a)^3}{12 N^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Risultati (approssimati)

1) $N = 457$

2) $N = 621$