Esercizi di Analisi Matematica 2A

A cura di Marco Di Marco

Anno accademico 2023-24

Indice

1 Esercizi visti il 10 ottobre 2023

Esercizio 1. [1, Esercizio 1.1](Caratterizzazione sequenziale della chiusura). Siano (X, d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $x \in X$. Provare che $x \in \overline{A}$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$.

Svolgimento. Proviamo prima l'implicazione ($\Leftarrow$). Sia quindi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ con $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $x \notin \overline{A}$. Applicando la definizione di chiusura (vedi [2, Definizione 2.1.3]) ciò ci dice che esiste un $\overline{r} > 0$ tale che

$$B(\overline{r}, x) \cap A = \emptyset. \tag{A}$$

Ma dalla definizione di convergenza (vedi [2, Definizione 1.4.1]) abbiamo anche che $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Ciò vuol dire che esiste un $\overline{n} > 0$ tale che $d(x_n, x) < \overline{r}$ per ogni $n > \overline{n}$. In altre parole $x_n \in B(\overline{r}), x$ per ogni $n > \overline{n}$. Ma $x_n \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ quindi $x_n \in A \cap B(r, x)$ per ogni $n > \overline{n}$ contraddicendo (A). Vediamo l'implicazione ($\Rightarrow$). Sia $x \in \overline{A}$. Sappiamo che per ogni $r > 0$ si ha che

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset. \tag{B}$$

Per $n \in \mathbb{N}$ scegliamo il raggio della palla in (B) come $\frac{1}{n}$. In particolare abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere un x_n nell'intersezione non vuota $B(x, \frac{1}{n}) \cap A$; in altre parole scegliamo

$$x_n \in B(x, \tfrac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset.$$

Inoltre, siccome $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ abbiamo che $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Quindi tale successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è quella cercata. $\square$

Esercizio 2. [1, Esercizio 1.2] Siano (X, d) uno spazio metrico ed $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Provare le seguenti affermazioni:

(i) $\mathring{A}$ è il più grande insieme aperto contenuto in A;

(ii) $\overline{A}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene A.

Svolgimento. (i) Dalla definizione di interno di un insieme (vedi [2, Definizione 2.1.1]) risulta immediato che se abbiamo due insiemi $U_1, U_2 \subseteq X$ tali che $U_1 \subseteq U_2$ abbiamo che $\mathring{U}_1 \subseteq \mathring{U}_2$. Sia quindi B un aperto tale che $B \subseteq A$. Ma allora $\mathring{B} = B \subseteq \mathring{A}$ da cui la tesi.

(ii) Dalla definizione di chiusura di un insieme (vedi [2, Definizione 2.1.3]) risulta immediato che se abbiamo due insiemi $U_1, U_2 \subseteq X$ tali che $U_1 \subseteq U_2$ abbiamo che $\overline{U_1} \subseteq \overline{U_2}$. Sia quindi B un chiuso tale che $B \supseteq A$. Ma allora $\overline{B} = B \supseteq \overline{A}$ da cui la tesi.

$\square$

Esercizio 3. [1, Esercizio 1.3] Siano (X, d) uno spazio metrico ed $A \subseteq X$. Provare che $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$.

Svolgimento. Vediamo prima l'inclusione $(\subseteq)$. Sia $p \in \overline{A}$: ciò vuol dire che per ogni $r > 0$ si ha che

$$B(p, r) \cap A \neq \emptyset.$$

A questo punto abbiamo due possibilità:

$$B(p, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \quad \forall r > 0 \text{ oppure } \exists r > 0 \text{ s.t. } B(p, r) \cap (X \setminus A) = \emptyset.$$

Nel primo caso abbiamo che $p \in \partial A$ mentre nel secondo $p \in \mathring{A}$. L'inclusione $(\supseteq)$ segue immediatamente dal fatto che $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$ e dal fatto che $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} \subseteq \overline{A}$. $\square$

Esercizio 4. [1, Esercizio 1.4] Sia $l^\infty(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni reali limitate:

$$l^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ successione in } \mathbb{R} \text{ limitata}\}.$$

1. Verificare che $l^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale con le naturali operazioni di somma e moltiplicazione scalare per le successione.

2. Verificare che la funzione $\|\cdot\|_\infty : l^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ così definita

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{|a_n| \in \mathbb{R} \text{ s.t. } n \in \mathbb{N}\}.$$

definisce una norma.

3. Verificare che la funzione $d_\infty : l^\infty \times l^\infty \to [0, +\infty)$ così definita

$$d_\infty(x, y) = \|x - y\|_{l^\infty}$$

è una distanza su $l^\infty(\mathbb{R})$.

Svolgimento. 1. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dobbiamo mostrare che $\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})$. Sappiamo che esistono $C_a, C_b > 0$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $|a_n| \leq C_a$ e $|b_n| \leq C_b$. Abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|\alpha a_n + \beta b_n| \leq |\alpha||a_n| + |\beta||b_n| < |\alpha|C_a + |\beta|C_b < +\infty.$$

2. Vediamo che $\|\cdot\|_\infty$ è davvero una norma (vedi [2, Definizione 1.3.1]): è chiaro che è non-negativa: se abbiamo che $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = 0$ segue che $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione identicamente nulla che è lo zero dello spazio vettoriale $l^\infty(\mathbb{R})$. Sia invece $\lambda \in \mathbb{R}$: abbiamo che

$$\|\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |\lambda a_n| = |\lambda| \sup_{\mathbb{N}} |a_n| = \lambda \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

   Ci resta da dimostrare la disuguaglianza triangolare: siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})$: abbiamo che

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |a_n + b_n| \leq$$

$$\leq \sup_{\mathbb{N}}(|a_n| + |b_n|) = \sup_{\mathbb{N}} |a_n| + \sup_{\mathbb{N}} |b_n| = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty + \|(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty.$$

3. Il fatto che d_∞ sia una distanza segue immediatamente dal fatto che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma (vedi [2, Definizione 1.3.1]).

□

Esercizio 5. [1, Esercizio 1.5] Sia (X, d) uno spazio metrico e definiamo la funzione $\delta : X \times X \to [0, +\infty)$ come

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad x, y \in X.$$

Verificare che (X, δ) è uno spazio metrico e che ha la stessa topologia di (X, d).

Svolgimento. Dobbiamo verificare che δ sia effettivamente una distanza (vedi [2, Definizione 1.1.1]). É chiaro che visto che anche d è una distanza si ha che $\delta(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$, $\delta(x, y) = 0$ se e solo se $x = y \in X$ e $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ per ogni $x, y \in X$. Ci resta da mostrare la disuguaglianza triangolare: siano $x, y, z \in X$: vogliamo vedere che

$$\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y).$$

Abbiamo che

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)}$$

ora usiamo la disuguaglianza triangolare di d e otteniamo

$$1 - \frac{1}{1 + d(x, y)} \leq 1 - \frac{1}{1 + d(x, z) + d(z, y)} = \frac{d(x, z) + d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} =$$

$$= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} \leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(z, y)} = \delta(x, z) + \delta(z, y).$$

Per provare che la topologia indotta da δ coincide con quella indotta da d ci basta mostrare che ogni palla centrata in un certo $x \in X$ in una metrica indotta da δ contiene una palla centrata in x nella metrica indotta da d e viceversa. Questo è vero visto che per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$ si ha che

$$B_d(x, r) \subseteq B_\delta(x, r) \text{ e } B_\delta(x, \tfrac{r}{r+1}) \subseteq B_d(x, r).$$

□

Esercizio 6. [1, Esercizio 1.6] Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ il seguente insieme:

$$A = \left\{ \frac{pq}{p^2 + q^2 + 1} \in \mathbb{R} \text{ s.t. } p, q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Calcolare la chiusura $\overline{A} \subseteq \mathbb{R}$ rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Cerchiamo di capire chi possa essere $\overline{A}$. Ricordiamo che per ogni $p, q \in \mathbb{R}$ si ha che $(p-q)^2 \geq 0$. Ciò implica che $pq \leq \frac{1}{2}(p^2+q^2)$. Analogamente abbiamo che $(p+q)^2 \geq 0$. Ciò implica che $-\frac{1}{2}(p^2+q^2) \leq pq$. Quindi abbiamo

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{p^2+q^2}{2p^2+2q^2+2} \leq \frac{pq}{p^2+q^2+1} \leq \frac{p^2+q^2}{2p^2+2q^2+2} \leq \frac{1}{2}.$$

Ora $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ è un chiuso e $A \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ quindi $\overline{A} \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Vediamo che vale l'inclusione opposta e che quindi in realtà si ha che $\overline{A} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Sia quindi $\overline{y} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Vediamo quindi che esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{y}$. Consideriamo la funzione $y = \frac{x}{1+x^2}$: essa è una biezione quando manda $[-1,1]$ in $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Quindi esiste un unico $\overline{x} \in [-1,1]$ tale che $\overline{y} = \frac{\overline{x}}{1+\overline{x}^2}$. Ora siccome $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ è denso in $[-1,1]$ abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $x_n \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ tale che $|\overline{x} - x_n| \leq \frac{1}{n}$. In altre parole possiamo trovare una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [-1,1] \cap \mathbb{Q}$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{x}$. Visto che $x_n \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ vuol dire che esistono $\alpha_n \in \mathbb{Z}$ ed $\beta_n \in \mathbb{N}$ tali che $x_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$. In particolare $n\alpha_n \in \mathbb{Z}$ e $n\beta_n \in \mathbb{N}$. Ora osserviamo che

$$A \ni \frac{(n\alpha_n)(n\beta_n)}{n^2\alpha_n^2 + n^2\beta_n^2 + 1} = \frac{\frac{\alpha_n}{\beta_n}}{\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)^2 + 1 + \frac{1}{n^2\beta_n^2}} = \frac{x_n}{(x_n)^2 + 1 + \frac{1}{n^2\beta_n^2}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\overline{x}}{\overline{x}^2+1} = \overline{y}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo diviso numeratore e denominatore per $n^2\beta_n^2$. La successione

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(n\alpha_n)(n\beta_n)}{n^2\alpha_n^2 + n^2\beta_n^2 + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

è quindi quella cercata. □

Esercizio 7. [1, Esercizio 1.7] Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato, $x \in A$ ed $r \subseteq \mathbb{R}^n$ una semiretta uscente da x. Provare che $r \cap \partial A \neq \emptyset$.

Svolgimento. Parametrizziamo la semiretta r come

$$r(t) = x + vt \text{ per } t \geq 0$$

dove $v \in \mathbb{R}^n$ è un versore opportunamente scelto. Cosideriamo ora l'insieme

$$I = \{t \geq 0 \text{ s.t. } r(t) \in A\}.$$

Sia ora $\overline{t} = \sup I$. Sappiamo che $0 < \overline{t}$ perchè A è aperto e che $\overline{t} < +\infty$ perchè A è limitato. Per definizione $r(\overline{t}) \in r$. Se mostriamo che $r(\overline{t}) \in \partial A$ abbiamo concluso. Vogliamo quindi mostrare che per ogni $s > 0$ si ha che

$$B(r(\overline{t}), s) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \text{ e } B(r(\overline{t}), s) \cap A \neq \emptyset$$

La prima condizione è vera perchè per ogni $s > 0$ si ha che $r(\overline{t} + \frac{s}{2}) \in B(r(\overline{t}), s) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Verifichiamo la seconda condizione: se $\overline{t} \in I$ allora $r(\overline{t}) \in A$ e abbiamo concluso; se invece $\overline{t} \notin I$ allora esiste una successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ tale che $t_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{t}$ ma ciò equivale a dire che per ogni $s > 0$ esiste un $t_n \in I$ tale che $\overline{t} - t_n = |r(\overline{t}) - r(t_n)| < s$. In particolare $r(t_n) \in B(r(\overline{t}), s) \cap A$. □

Esercizio 8. [1, Esercizio 2.1] Sia (X, d) uno spazio metrico discreto e sia $\mathbb{R}$ munito della distanza standard. Provare che una qualsiasi funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è continua.

Svolgimento. Proviamo preliminarmente che la topologia indotta dalla distanza discreta (vedi [2, Esempio 1.1.2]) è quella discreta ovvero che ogni $A \subseteq X$ è aperto. Per fare ciò osserviamo che ogni $p \in A$ è un punto interno perchè $p = B(p, \frac{1}{2}) \subseteq A$. Infine usiamo la caratterizzazione topologica della continuità (vedi [2, Teorema 2.5.1]). Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ un aperto; $f^{-1}(B) \subseteq X$ che (siccome la topologia è discreta) è aperto. □

Esercizio 9. [1, Esercizio 2.5] Sia $\mathbb{R}$ munito della distanza euclidea, $A \subset \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni

(i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto,

(ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto,

(iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso,

(iv) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

Svolgimento. (i) É falso. Per vederlo prendiamo $f(x) = |x|$ ed $A = (1, 2) \cup \{-\frac{3}{2}\}$. Abbiamo che $f(A) = (1, 2)$ che è un aperto, ma A non lo è.

(ii) É falso. Per vederlo prendiamo $f(x) = \sin(x)$ ed $A = \mathbb{R}$. Abbiamo che A è un aperto, ma $f(A) = [-1, 1]$ non lo è.

(iii) É falso. Per vederlo prendiamo $f(x) = 1$ ed $A = (-1, 1)$. Abbiamo che $f(A) = \{1\}$ che è un chiuso, ma A non lo è.

(iv) É falso. Per vederlo prendiamo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ed $A = \mathbb{R}$. Abbiamo che A è un chiuso, ma $f(A) = (0, 1]$ non lo è.

□

Esercizio 10. [1, Parte dell'esercizio 2.9] Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici, $f : X \to Y$ una funzione continua ed $A \subset X$. Provare che $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Svolgimento. Sia $y \in f(\overline{A})$. Vogliamo provare che $y \in \overline{f(A)}$. Lo facciamo usando la caratterizzazione sequenziale della chiusura (vedi [1, Esercizio 1.1]). Vogliamo quindi mostrare che esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ tale che $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} y$. Visto che $y \in f(\overline{A})$ esiste un $x \in \overline{A}$ tale che $f(x) = y$. Siccome $x \in \overline{A}$ esiste una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$. Ma allora definendo $y_n := f(x_n)$ e ricordando che f è continua otteniamo la successione cercata. □

2 Esercizi visti il 24 ottobre 2023

Esercizio 11. [1, Esercizio 2.3] Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se X è compatto allora K è compatto.

Svolgimento. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione. Ma allora è una successione anche in X che è compatto quindi ammette una sottosuccessione $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che $x_{n_j} \xrightarrow{j\to+\infty} \overline{x} \in X$. Ma $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente contenuta in K che è un chiuso quindi $\overline{x} \in K$ da cui la tesi. □

Esercizio 12. [1, Esercizio 2.4] Provare che il seguente insieme è compatto nella topologia standard di $\mathbb{C}$:

$$K = \left\{ \frac{1 + ni}{n + i} \in \mathbb{C} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{i\}.$$

Provare l'affermazione sia con la definizione di compattezza per ricoprimenti sia con la definizione di compattezza sequenziale.

Svolgimento. Scriviamo in maniera più comoda K:

$$\frac{1+ni}{n+i} = \frac{(1+ni)(n-i)}{(n+i)(n-i)} = \frac{n-i+n^2i+n}{n^2+1} = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{n^2-1}{n^2+1}i$$

Definiamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definita come $f(n) = \frac{2n}{n^2+1} + \frac{n^2-1}{n^2+1}i$. Vediamo che K è compatto tramite la definizione di compattezza sequenziale. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione. Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $m_n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = f(m_n)$. Quindi possiamo pensare alla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come $(f(m_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Vediamo che ammette una sottosuccessione convergente: se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene infiniti termini uguali tra di loro allora prendo quella sequenza per sottosuccessione (che essendo costante è banalmente convergente). Se invece non ci sono infiniti termini uguali tra loro prendiamo una sottosuccessione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ costruita così: $b_1 = a_1 = f(m_1)$ per b_2 prendo il primo termine $a_k = f(m_k)$ tale che $m_k > m_1$ e così via... Allo stesso modo per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $j_n \in \mathbb{N}$ tale che $b_n = f(j_n)$. Ma in questa successione abbiamo che $j_n < j_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma allora questa successione è convergente perchè o è costante (almeno da un certo punto in poi), e allora abbiamo concluso, oppure abbiamo che $j_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ e allora

$$\frac{2n}{n^2+1} + \frac{n^2}{n^2+1}i \xrightarrow{n\to+\infty} 0 + 1i.$$

Ma $i \in K$ quindi K è compatto. Vediamo che K è compatto tramite la definizione di compattezza per ricoprimenti. Sia $(U_j)_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di K. Allora esiste un raggio $r > 0$ e un $\overline{j} \in J$ tale che

$$U_{\overline{j}} \supseteq B(i,r) \ni i.$$

Ma siccome abbiamo già visto che $f(n) \xrightarrow{n\to+\infty} i$ allora esiste un $n_r \in \mathbb{N}$ tale che $|f(n_r) - i| < r$ per ogni $n > n_r$. Ma allora considero un U_{j_1} tale che $f(1) \in U_{j_1}$ e così via fino ad $n_r - 1$. Il ricoprimento finito cercato è quello dato da $U_{j_1}, U_{j_2}, ..., U_{j_{n_r-1}}, U_{\overline{j}}$. $\square$

Esercizio 13. [1, Esercizio 2.7] Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua e bigettiva. Provare che se X è compatto allora la funzione inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

Svolgimento. Osserviamo che equivale a mostrare che f è una mappa aperta ovvero che per ogni aperto $A \subseteq X$ si ha che $f(A)$ è aperto in Y. Ma visto che f è bigettiva ciò equivale a mostrare che f è una mappa chiusa ovvero che per ogni chiuso $C \subseteq X$ si ha che $f(C)$ è chiuso in Y. Vediamo perchè: sia $C \subseteq X$ un chiuso ed f una mappa aperta e bigettiva, mostriamo che è f è una mappa chiusa (l'implicazione inversa è analoga). Abbiamo che $f(X \setminus C)$ è aperto in Y ma visto che f è bigettiva segue che $f(X \setminus C) = f(X) \setminus f(C) = Y \setminus f(C)$ ma visto che $Y \setminus f(C)$ è aperto segue che $f(C)$ è chiuso. Tornando all'esercizio sia quindi $C \subseteq X$ un chiuso. Per [1, Esercizio 2.3] C è anche un compatto in X. Ma per [2, Teorema 3.5.1] $f(C)$ è un compatto in Y e quindi è chiuso. $\square$

Esercizio 14. [1, Esercizio 3.1 (il primo di quelli di base)] Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Provare che se X è completo allora anche K è completo con la distanza ereditata da X.

Svolgimento. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione di Cauchy: dobbiamo mostrare che tale successione è convergente. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in K allora lo sarà anche in X, ma X è completo dunque esiste $\overline{x} \in X$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{x}$. Se mostriamo che $\overline{x} \in K$ abbiamo concluso ma ciò è vero visto che se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ allora $\overline{x} \in \overline{K}$ ma K è chiuso quindi $\overline{K} = K$. $\square$

Esercizio 15. [1, Esercizio 3.1 (il primo degli intermedi)] Provare che lo spazio $C([0,1])$ con la distanza data dalla norma integrale

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$$

non è uno spazio metrico completo.

Svolgimento. Dobbiamo trovare una successione di Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,1])$ non convergente. Prendiamo la seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n(x-\frac{1}{2}) \text{ se } \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \\ 1 \text{ se } \frac{1}{2}+\frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

è chiaro che $f_n \in C([0,1])$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Vediamo che la successione è di Cauchy: siano $n, m \in \mathbb{N}, n > m$; vediamo che

$$d(f_n, f_m) = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |n(x-\tfrac{1}{2}) - m(x-\tfrac{1}{2})|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} |1 - m(x-\tfrac{1}{2})|dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (n-m)(x-\tfrac{1}{2})dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (1-mx+\tfrac{m}{2}))dx = (n-m)\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} + \left[x - \frac{mx^2}{2} + \frac{mx}{2}\right]_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} =$$

$$= \frac{n-m}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)\right] +$$

$$-\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{n-m}{2n^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2m} + \frac{m}{2n^2} = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right).$$

Quindi risulta chiaro che la successione è di Cauchy; vediamo che non è convergente. Ragioniamo per assurdo e supponiamo esista $f \in C([0,1])$ che sia il limite della successione. Dobbiamo quindi avere che $d(f_n, f) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ ovvero che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |f(x) - n(x-\tfrac{1}{2})|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |f(x) - 1|dx\right) = 0$$

In particolare ciò implica che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx = 0 \text{ e } \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - 1|dx = 0$$

Ma ciò ci conduce all'assurdo visto che f è continua in ogni punto di $[0,1]$ e quindi anche in $\frac{1}{2}$. Ma dalla prima condizione abbiamo che $\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = 0$ mentre dalla seconda che $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = 1$. □

Esercizio 16. [1, Esercizio 3.4] Definiamo la funzione $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0, +\infty)$

$$d(x,y) = |e^x - e^y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

i) Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

ii) Provare che lo spazio metrico non è completo.

iii) Determinare il completamento di $(\mathbb{R}, d)$.

Svolgimento. i) Vediamo che d è una distanza: è chiaro che $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Supponiamo invece che $d(x,y) = 0$ ovvero che $|e^x - e^y| = 0$. Ma allora

$$0 = |e^x - e^y| = e^x|1 - e^{y-x}| \Rightarrow 1 - e^{y-x} = 0 \Rightarrow e^{y-x} = 1 \Rightarrow y = x.$$

Ci resta da vedere la disuguaglianza triangolare: siano $x, y, z \in \mathbb{R}$: abbiamo che

$$d(x,y) = |e^x - e^y| = |e^x - e^z + e^z - e^y| \leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y| = d(x,z) + d(z,y).$$

ii) Cerchiamo una successione di Cauchy che non sia convergente. Prendiamo per $n \in \mathbb{N}$ la successione $x_n = -n$. Vediamo che è di Cauchy: siano $m, n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$d(x_n, x_m) = |e^{-n} - e^{-m}|$$

da cui è chiaro che la successione è di Cauchy. Vediamo che invece non converge: ragioniamo per assurdo e supponiamo esista $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tale che $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{x}$. Ma allora

$$d(x_n, \overline{x}) = |e^{-n} - e^{\overline{x}}| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

implica che $e^{\overline{x}} = 0$ il che è assurdo.

iii) Consideriamo una coppia (Y, d_Y) dove $Y = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e d_Y è definita come d e in più la estendiamo su Y con la convenzione che $e^{-\infty} = 0$. É chiaro che (Y, d_Y) è uno spazio metrico; mostriamo che (Y, d_Y) è il completamento di $(\mathbb{R}, d)$ ovvero che soddisfa le condizioni in [2, Definizione 3.1.4]. Proviamo che (Y, d_Y) è completo. Sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ una successione di Cauchy. Mostriamo che è convergente. Consideriamo la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ come $a_n = e^{y_n}$: abbiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, +\infty)$. Ma allora la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy rispetto alla distanza standard di $\mathbb{R}$; quindi coverge nella chiusura di $[0, +\infty)$ che coincide con sè stesso ovvero esiste un $\overline{a} \in [0, +\infty)$ tale che $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{a}$. Ora siccome l'applicazione $\exp : Y \to [0, +\infty)$ è bigettiva segue che esiste un $\overline{y} \in Y$ tale che $\overline{a} = e^{\overline{y}}$. Ma allora segue che $y_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{y}$ rispetto a d_Y. Ci resta da vedere che esiste un'isometria $f : \mathbb{R} \to Y$ tale che $\overline{f(\mathbb{R})} = Y$. Ci basta prendere $f(r) = r$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

□

Esercizio 17. [1, Esercizio 3.6] Siano $X = (-1, +\infty)$ e $d : X \times X \to [0, +\infty)$ la funzione

$$d(x,y) = \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\right|, \quad x, y \in X.$$

1. Provare che (X, d) è uno spazio metrico.
2. Esibire un'isometria suriettiva $\varphi : \mathbb{R} \to (X, d)$,$d(\varphi(t), \varphi(s)) = |t - s|$ con $s, t \in \mathbb{R}$.
3. Provare che (X, d) è uno spazio metrico completo.

Svolgimento. 1. Vediamo che d è una distanza: è chiaro che per ogni $x, y \in X$ si ha $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$ e $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y = 0$. Ci resta da mostrare la disuguaglianza triangolare. Siano $x, y, z \in X$. Abbiamo che

$$d(x,y) = \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+z}\frac{1+z}{1+y}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+z}\right) + \ln\left(\frac{1+z}{1+y}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left|\ln\left(\frac{1+x}{1+z}\right)\right| + \left|\ln\left(\frac{1+z}{1+y}\right)\right| = d(x,z) + d(z,y).$$

2. Vediamo che l'applicazione $\varphi : \mathbb{R} \to (X, d)$ definita come

$$\varphi(x) = e^x - 1$$

è un'isometria suriettiva. Siano $s, t \in \mathbb{R}$: abbiamo che

$$d(\varphi(s), \varphi(t)) = d(e^s - 1, e^t - 1) = \left|\ln\left(\frac{e^s}{e^t}\right)\right| = |s - t|.$$

La suriettività segue dal fatto che exp è suriettiva come applicazione da $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$ (e quindi φ lo è da $\mathbb{R} \to (-1, +\infty)$).

3. Segue immediatamente dal punto precedente visto che $\mathbb{R}$ è completo ed isometrico ad (X, d).

□

Esercizio 18. [1, Esercizio 3.8] Lo spazio $l^\infty(\mathbb{R})$ introdotto nell'Esercizio 1.5 è uno spazio di Banach non separabile (non ha sottoinsiemi densi numerabili).

Svolgimento. Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ definiamo la succesisone $(\chi_n^A)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})$ definita come

$$\chi_n^A = \begin{cases} 0 \text{ se } n \notin A \\ 1 \text{ se } n \in A \end{cases}.$$

Consideriamo ora l'insieme $X = \{(\chi_i^A)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } A \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq l^\infty(\mathbb{R})$. X è un sottoinsieme non numerabile (visto che lo è l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$). Osserviamo ora che se $A \neq B \subseteq \mathbb{N}$ abbiamo che

$$d_\infty(\chi^A, \chi^B) = \sup_{\mathbb{N}} |\chi^A - \chi^B| = 1.$$

Per ogni $\chi \in X$ consideriamo la palla $B_\chi = B(\chi, \frac{1}{2})$. Sia ora $C \subseteq l^\infty(\mathbb{R})$ un sottoinsieme numerabile. Se mostriamo che C non può essere denso abbiamo concluso. Osserviamo che C può intersecare al massimo solo una quantità numerabile delle palle B_χ. Ma allora consideriamo l'insieme

$$U = \left\{\bigcup B_\chi \text{ tali che non intersecano } C\right\}$$

Ma allora U è un insieme aperto non vuoto tale che $U \cap C = \emptyset$ da cui la tesi. □

Esercizio 19. [1, Esercizio 4.1] Determinare tutti i numeri $\alpha \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{1 + \alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia una contrazione rispetto alla distanza euclidea.

Svolgimento. Usiamo il Teorema di punto fisso di Banach (vedi [2, Teorema 4.1.2]) se f fosse una contrazione allora f avrebbe solo un punto fisso. Studiamo quindi i punti fissi di f: sia $x \in \mathbb{R}$. Imponiamo $f(x) = x$ e quindi

$$\sqrt{1+\alpha x^2} = x$$

elevando al quadrato otteniamo

$$1 + \alpha x^2 = x^2$$

ovvero

$$x^2(1-\alpha) - 1 = 0$$

e quindi

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Osserviamo che per $\alpha \geq 1$ questa equazione non ha soluzione quindi f non è una contrazione per $\alpha \geq 1$. Se invece $\alpha < 1$ c'è l'unica soluzione $x = \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$ (notare che dobbiamo scartare la soluzione negativa che era stata "aggiunta" dall'elevamento al quadrato). Quindi f potrebbe essere una contrazione per $\alpha < 1$. Vediamo che in effetti lo è. Abbiamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ per il teorema di Lagrange esiste $z \in [x, y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$$

Abbiamo che

$$f'(z) = \frac{\alpha z}{\sqrt{1+\alpha z^2}}$$

e quindi

$$|f'(z)| = \frac{\alpha|z|}{\sqrt{1+\alpha z^2}} \leq \frac{\alpha|z|}{\sqrt{\alpha}|z|} = \sqrt{\alpha}$$

e in conclusione da $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$ ricaviamo che

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(z)||x-y| \leq \sqrt{\alpha}|x-y|$$

Ma se $\alpha < 1$ allora segue che f è una contrazione. □

3 Esercizi visti il 7 novembre 2023

Esercizio 20. [1, Esercizio 4.2] Sia $g \in C([0,1])$ una funzione continua fissata

i) Provare che esiste un'unica soluzione $y \in C([0,1])$ dell'equazione funzionale

$$y(x) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}}dt + g(x)$$

ii) Calcolare la soluzione nel caso $g(x) = x$.

Svolgimento. i) Vediamo che l'applicazione $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1])$ definita come

$$\Phi(y(x)) = \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{t}}dt + g(x)$$

è una contrazione.

$$\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_{C([0,1])} = \left\|\frac{1}{3}\int_0^x \frac{y_1(t)}{\sqrt{t}}dt + g(x) - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{y_2(t)}{\sqrt{t}}dt - g(x)\right\|_{C([0,1])} =$$

$$= \frac{1}{3}\left\|\int_0^x \frac{y_1(t)-y_2(t)}{\sqrt{t}}dt\right\|_{C([0,1])} \leq \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt\|y_1-y_2\|_{C([0,1])} = \frac{2}{3}\|y_1-y_2\|_{C([0,1])}$$

Φ è una contrazione e dunque ammette un unico punto fisso (per il teorema di Banach) che è la soluzione cercata.

ii) Deriviamo l'equazione e otteniamo

$$y'(x) = \frac{1}{3}\frac{y(x)}{\sqrt{x}} + 1$$

Questa è una ODE lineare del primo ordine:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

con

$$a(x) = -\frac{1}{3\sqrt{x}}, \quad b(x) = 1$$

sappiamo che la sua soluzione è

$$y(x) = e^{-A(x)}\left(\int_0^x b(s)e^{A(s)}ds\right)$$

con

$$A(x) = \int_0^x a(s)ds$$

abbiamo che (a meno di costanti)

$$A(x) = \int_0^x -\frac{1}{3\sqrt{s}}ds = -\frac{2}{3}\sqrt{x}$$

quindi

$$y(x) = e^{\frac{2\sqrt{x}}{3}}\int_0^x e^{-\frac{2\sqrt{s}}{3}}ds$$

infine

$$y(x) = e^{\frac{2\sqrt{x}}{3}}\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}e^{\frac{-2\sqrt{x}}{3}}(2\sqrt{x}+3)\right)$$

ovvero

$$y(x) = \frac{9}{2}e^{\frac{2\sqrt{x}}{3}} - 3\sqrt{x} - \frac{9}{2}$$

□

Esercizio 21. [1, Esercizio 4.4] Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione

$$\sin(x) + \int_0^x \sqrt{1+f'(t)^2}dt = \alpha f(x), \quad x \in [0,1]$$

i) Provare che per $|\alpha| > 1$ l'equazione ha un'unica soluzione $f \in C^1([0,1])$.

ii) Provare che per $|\alpha| \leq 1$ l'equazione non ha soluzione.

Svolgimento. i) Deriviamo l'equazione funzionale ottenendo

$$\cos(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2} = \alpha f'(x)$$

Visto che $|\alpha| > 1$ in particolare $\alpha \neq 0$ quindi possiamo definire il funzionale $\Phi : C([0,1]) \to C([0,1])$ definito come

$$\Phi(f(x)) = \frac{\cos(x) + \sqrt{1 + f(x)^2}}{\alpha}$$

Vediamo che è una contrazione.

$$\|\Phi(f_1) - \Phi(f_2)\|_\infty = \frac{1}{|\alpha|}\| \cos(x) + \sqrt{1 + f_1(x)^2} - \cos(x) - \sqrt{1 + f_2(x)^2}\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|}\left\| \frac{(\sqrt{1+f_1^2} - \sqrt{1+f_2^2})(\sqrt{1+f_1(x)^2} + \sqrt{1+f_2^2})}{\sqrt{1+f_1^2} + \sqrt{1+f_2^2}} \right\|_\infty =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|}\left\| \frac{f_1^2 - f_2^2}{\sqrt{1+f_1^2} + \sqrt{1+f_2^2}} \right\|_\infty \leq \frac{1}{|\alpha|}\left(\|f_1 - f_2\|_\infty \left\| \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{1+f_1^2} + \sqrt{1+f_2^2}} \right\|_\infty \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\alpha|}\|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Quindi se $|\alpha| > 1$ Φ è una contrazione e siccome $C([0,1])$ è uno spazio metrico completo Φ ha esattamente un unico punto fisso. Sia quindi $g \in C([0,1])$ tale che $\Phi(g) = g$. La soluzione dell'equazione funzionale è data dalla f definita come

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

ii) Deriviamo l'equazione ottenendo

$$\cos(x) + \sqrt{1 + f'(x)^2} = \alpha f'(x) \tag{1}$$

ovvero

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \alpha f'(x) - \cos(x)$$

Eleviamo al quadrato ottenendo

$$1 + f'(x)^2 = \alpha^2 f'(x)^2 + \cos^2(x) - 2\alpha\cos(x)f'(x)$$

i.e.

$$(\alpha^2 - 1)f'(x)^2 - 2\alpha\cos(x)f'(x) + \cos^2(x) - 1 = 0 \tag{2}$$

che è un'equazione di secondo grado rispetto a $f'(x)$. Escludiamo prima il caso in cui $\alpha = \pm 1$. Se $\alpha = 1$ l'equazione (2) diventa

$$-2\cos(x)f'(x) + \cos^2(x) - 1 = 0$$

ovvero

$$-2\cos(x)f'(x) - \sin^2(x) = 0$$

i.e.

$$f'(x) = -\frac{\sin^2(x)}{2\cos(x)}$$

da cui osserviamo che (siccome $x \in [0,1]$) f' è sempre negativa. Ma ciò è assurdo visto che nell'equazione (1) abbiamo che il lato sinistro dell'equazione è sempre positivo. Vediamo il caso $\alpha = -1$. L'equazione (2) diventa

$$2\cos(x)f'(x) - \sin^2(x) = 0$$

ovvero

$$f'(x) = \frac{\sin^2(x)}{2\cos(x)}$$

da cui osserviamo che (siccome $x \in [0,1]$) f' è sempre positiva. Ma ciò è assurdo visto che nell'equazione (1) abbiamo che il lato sinistro dell'equazione è sempre positivo. Ci resta da veedere il caso quando $|\alpha| < 1$. Risolviamo l'equazione (2) rispetto a $f'(x)$ ottenendo

$$f'(x) = \frac{2\alpha\cos(x) \pm \sqrt{4(\alpha^2 - \sin^2(x))}}{2(\alpha^2 - 1)} = \frac{\alpha\cos(x) \pm \sqrt{(\alpha^2 - \sin^2(x))}}{\alpha^2 - 1}. \tag{3}$$

Osserviamo ora che f' non può avere zeri: supponiamo ci sia un $s \in [0,1]$ tale che $f'(s) = 0$ allora sostituendo in (1) avremmo

$$\cos(s) + \sqrt{1 + f'(s)^2} = \alpha f'(s) \Rightarrow \cos(s) + 1 = 0$$

il che è assurdo visto che $s \in [0,1]$. Calcoliamo ora $f'(0)$ con la formula che abbiamo ricavato in (3):

$$f'(0) = \frac{\alpha \pm |\alpha|}{\alpha^2 - 1}$$

Per comodità distinguiamo ora i due casi $0 < \alpha < 1$ e $-1 < \alpha < 0$. (Il caso $\alpha = 0$ è banale visto che in (1) avremmo qualcosa di positivo al membro di sinistra uguale a 0 a destra). Se $0 < \alpha < 1$ abbiamo che dobbiamo sempre scegliere la soluzione con il $+$ in (3) (altrimenti avremmo $f'(0) = 0$). Ma la soluzione con il $+$ è sempre negativa quindi anche qui otterremo un assurdo in (1). Ci resta da vedere il caso $-1 < \alpha < 0$. Qui invece ci tocca scegliere la soluzione con il $-$ in (3) (altrimenti avremmo $f'(0) = 0$). Vediamo che allora in questo caso f' è sempre positiva (ottenendo anche qui una contraddizione in (1)). Visto che $\alpha^2 - 1 < 0$ ci resta da mostrare che $\alpha\cos(x) - \sqrt{\alpha^2 - \sin^2(x)} < 0$ ovvero che

$$\alpha\cos(x) < \sqrt{\alpha^2 - \sin^2(x)}$$

ma ciò è triviale visto che il lato sinistro della disuguaglianza è sempre negativo e il lato destro è sempre positivo. (Notare che in questo esercizio abbiamo sempre assunto di poter estrarre la radice in (3); se non l'avessimo potuto fare tanto meglio, la soluzione comunque non sarebbe esistita).

□

Esercizio 22. [1, Esercizio 5.1] Sia $V = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0, \mathrm{Lip}(f) \leq 1\}$. Provare che V è un sottoinsieme compatto di $C([0,1])$.

Svolgimento. Visto che $[0,1]$ è uno spazio metrico compatto vogliamo usare il Teorema di Ascoli-Arzelà (vedi [2, Teorema 4.2.2]). In altre parole se mostriamo che V è chiuso, equilimitato ed equicontinuo abbiamo concluso. Mostriamo che V è chiuso. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V$ una successione convergente ad una certa $\overline{f}$. Proviamo che $\overline{f} \in V$. Visto che $C([0,1])$ è uno spazio metrico completo abbiamo che $\overline{f} \in C([0,1])$. Se $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{f}$ segue che per ogni $x \in [0,1]$ si ha che

$f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{f}(x)$ e in particolare per $x = 0$ si ha $0 = f_n(0) \xrightarrow{n\to+\infty} \overline{f}(0)$ da cui segue che $\overline{f}(0) = 0$. Infine abbiamo che $\mathrm{Lip}(\overline{f}) \leq 1$ visto che per ogni $x, y \in [0,1]$ si ha

$$|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|.$$

Vediamo che V è equilimitato ovvero che esiste una costante $M \geq 0$ tale che

$$\sup_{f\in V} \|f\|_{C([0,1])} \leq M$$

ovvero

$$\sup_{f\in V} \left(\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \right) \leq M.$$

Osserviamo che siccome $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$ segue che per ogni $f \in V$, $x, y \in [0,1]$ si ha che

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \leq 1$$

Ma se fissiamo $y = 0$ otteniamo che per ogni $x \in [0,1]$, $f \in V$ si ha che

$$|f(x)| \leq |x| \leq 1$$

ovvero V è equilimitato con costante $M = 1$. Vediamo che V è equicontinuo ovvero che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\text{per ogni } x, y \in [0,1], |x - y| < \delta \text{ si ha che } \sup_{f\in V} |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Basta scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Infatti se $f \in V$, $x, y \in [0,1]$, $|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ si ha che

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Esercizio 23. [1, Esercizio 5.6] Sia $X = C([0,1])$ munito della sup-norma, e sia $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Definiamo l'applicazione $T : X \to X$

$$T(f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)dt, \quad f \in X.$$

i) Provare che $s \to T(f)(s)$ è continua su $[0,1]$.

ii) Provare che $T \in \mathcal{L}(X, X)$.

iii) Dare condizioni su k affinchè T sia una contrazione.

iv) Sia $K \subseteq X$ limitato. Stabilire se $\overline{T(K)}$ è compatto.

Svolgimento. i) Visto che k è continua abbiamo, per il teorema di Heine-Cantor (vedi [2, Teorema 3.5.6]), che è uniformemente continua sul compatto $[0,1]^2$. Ciò vuol dire che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in [0,1]^2$, $|(s_1, t_1) - (s_2, t_2)| < \delta$ si ha che

$$|k(s_1, t_1) - k(s_2, t_2)| < \varepsilon$$

Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$. Ma allora segue che esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $s_1, s_2 \in [0,1], |s_1 - s_2| < \delta$

$$|T(f)(s_1) - T(f)(s_2)| \leq \int_0^1 |k(s_1, t) - k(s_2, t)||f(t)|dt \leq \varepsilon \int_0^1 |f(t)|dt \leq \varepsilon \|f\|_{C([0,1])}.$$

ii) Vediamo che T è lineare: siano $f, g \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Abbiamo per ogni $s \in [0,1]$ che

$$T(\alpha f + \beta g)(s) = \int_0^1 k(s,t)(\alpha f + \beta g)(t)dt =$$

$$= \alpha \int_0^1 k(s,t)f(t)dt + \beta \int_0^1 k(s,t)g(t)dt = \alpha T(f)(s) + \beta T(g)(s).$$

Vediamo che T è limitato: abbiamo che

$$\|T\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|Tf\|_\infty = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \sup_{s\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(s,t)f(t)dt \right| \leq \sup_{s\in[0,1]} \int_0^1 |k(s,t)|dt \leq \|k\|_\infty < +\infty.$$

iii) Visto che per ogni $f \in X$ abbiamo $\|T(f)\|_\infty \leq \|T\| \|f\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty$ segue che T è una contrazione se $\|k\|_\infty < 1$.

iv) Vogliamo rispondere usando il teorema di Ascoli-Arzelà. Possiamo applicarlo perchè $\overline{T(K)} \subseteq C([0,1])$ e $[0,1]$ è uno spazio metrico compatto. Abbiamo che $\overline{T(K)}$ è compatto se e soltanto se è chiuso (e lo è per definizione), equilimitato ed equicontinuo. Vediamo che è equilimitato. Vogliamo mostrare che esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $f \in \overline{T(K)}$ si abbia $\|f\|_\infty \leq M$. Se $f \in \overline{T(K)}$ allora esiste una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(K)$ tale che $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$. Ma allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una $g_n \in K$ tale che $T(g_n) = f_n$. Ma allora

$$\|f\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|T(g_n)\|_\infty \leq \lim_{n\to+\infty} \|T\| \|g_n\|_\infty \leq \|k\|_\infty \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty.$$

Ma visto che K è limitato esiste una costante $M > 0$ tale che per ogni $g \in K$ si ha $\|g\|_\infty \leq M$ e allora segue che

$$\|f\|_\infty \leq \|k\|_\infty \lim_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty \leq \|k\|_\infty M.$$

Vediamo che è anche equicontinuo e quindi, in definitiva, compatto. Vogliamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [0,1]$, $|x - y| < \delta$ si ha che

$$\sup_{f\in\overline{T(K)}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Se $f \in \overline{T(K)}$ allora esiste una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(K)$ tale che $f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f$. Ma allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una $g_n \in K$ tale che $T(g_n) = f_n$. Ma allora segue che

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to+\infty} |T(g_n)(x) - T(g_n)(y)|$$

Ma possiamo fare come abbiamo fatto nel punto $i)$ e quindi abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ (che dipende unicamente dalla k fissata e non dalla scelta di f) tale che se $|x - y| < \delta$ allora si ha

$$|f(x) - f(y)| = \lim_{n\to+\infty} |T(g_n)(x) - T(g_n)(y)| \leq \lim_{n\to+\infty} \varepsilon \|g_n\|_\infty \leq M\varepsilon.$$

dove M è la stessa costante di prima. La tesi segue dall'arbitrarietà di ε.

□

Esercizio 24. [1, Esercizio 6.4] Calcolare tutti gli $m, n \in \mathbb{N}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^m y^n}{x^2+y^2} \text{ se } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 \text{ se } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

1) abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$;

2) sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Svolgimento. 1) Sia $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Abbiamo che se esiste la derivata direzionale di f in $(0,0)$ in direzione v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{m+n} v_1^m v_2^n}{h(h^2 v_1^2 + h^2 v_2^2)} = \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2} \lim_{h\to 0} h^{m+n-3}$$

Escludiamo preliminarmente il caso in cui $v = (0,0)$: in questo caso per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0.$$

Vediamo invece cosa accade per $v \neq (0,0)$. In questo caso abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{v_1^m v_2^n}{v_1^2 + v_2^2} \lim_{h\to 0} h^{m+n-3} = \begin{cases} 0 \text{ se } m+n-3 > 0 \\ \frac{v_1^m v_2^m}{v_1^2+v_2^2} \text{ se } m+n-3 = 0 \\ \text{diverge se } m+n-3 < 0. \end{cases}$$

In definitiva il limite esiste ed è finito se e solo se $m + n \geq 3$.

2) Se f è differenziabile allora

$$v \to \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = df(0,0)(v)$$

deve essere lineare. Ma se $m + n = 3$ abbiamo visto che questo non è il caso. Ci resta da vedere il caso $m + n > 3$. Usiamo il test della differenziabilità (vedi [2, Osservazione 6.4.7]). (Osserviamo intanto che $\nabla f(0,0) = (0,0)$). Calcoliamo

$$\left| \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) - (0,0)\rangle}{|(x,y) - (0,0)|} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\frac{x^m y^n}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

Osserviamo ora che

$$|x|^m = (x^2)^{\frac{m}{2}} \leq (x^2+y^2)^{\frac{m}{2}}$$

e che

$$|y|^n = (y^2)^{\frac{n}{2}} \leq (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}$$

da cui segue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{\frac{m}{2}} (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{\frac{m+n-3}{2}}$$

Ma visto che $m + n - 3 > 0$ segue che il limite è 0. In definitiva f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $m + n > 3$.

$\square$

Esercizio 25. [1, Esercizio 6.5] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^6}{x^6+y^8} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Provare che f è continua su $\mathbb{R}^2$.

2) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Svolgimento. 1) f è liscia per definizione fuori dall origine quindi ci basta verificare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Abbiamo che

$$\left|\frac{x^2y^6}{x^6+y^8}\right| = \left|\frac{(x^6)^{\frac{2}{6}}(y^8)^{\frac{6}{8}}}{x^6+y^8}\right| \leq \left|\frac{(x^6+y^8)^{\frac{2}{6}}(x^6+y^8)^{\frac{6}{8}}}{x^6+y^8}\right| = (x^6+y^8)^{\frac{2}{6}+\frac{6}{8}-1} = (x^6+y^8)^{\frac{1}{12}}$$

da cui è chiaro che il limite per $(x,y)\to(0,0)$ è 0.

2) Usiamo il criterio di differenziabilità. Sugli assi f è identicamente nulla quindi abbiamo anche $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e ci resta da verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|(x,y)|} = 0.$$

Studiamo quindi

$$\frac{x^2y^6}{(x^6+y^8)\sqrt{x^2+y^2}}$$

prendiamo la traiettoria $(x,y) = (t, t^{\frac{3}{4}})$ per $t > 0$. Abbiamo

$$\frac{t^2t^{\frac{9}{2}}}{(t^6+t^6)\sqrt{t^2+t^{\frac{3}{2}}}} = \frac{t^{2+\frac{9}{2}-6}}{2\sqrt{t^{\frac{3}{2}}(t^{2-\frac{3}{2}}+1)}} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{3}{4}}\sqrt{t^{\frac{1}{2}}+1}} = \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{t^{\frac{1}{2}}+1}} \xrightarrow{t\to 0} \infty.$$

da cui f non è differenziabile in $(0,0)$.

□

Esercizio 26. [1, Esercizio 6.7, Formula di Eulero] Una funzione $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice (positivamente) omogenea di grado $\alpha \in \mathbb{R}$ se $f(tx) = t^\alpha f(x)$ per ogni $x \neq 0$ e $t > 0$. Provare che se $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è omogenea di grado α allora le sue derivate parziali sono omogenee di grado $\alpha - 1$. Verificare inoltre che, per $x \neq 0$

$$\langle \nabla f(x), x\rangle = \alpha f(x).$$

Svolgimento. Sia f una funzione positivamente omogenea di grado α. Abbiamo che per ogni $x \neq 0$, $t > 0$

$$\partial_{x_i} f(tx) = \lim_{h\to 0} \frac{f(tx + h\vec{e_i}) - f(tx)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{t^\alpha f\left(x + \frac{h}{t}\vec{e_i}\right) - t^\alpha f(x)}{h} =$$

$$= t^\alpha \lim_{h\to 0} \frac{1}{t} \frac{f\left(x + \frac{h}{t}\vec{e_i}\right) - f(x)}{h/t} = t^{\alpha-1} \lim_{(h/t)\to 0} \frac{f\left(x + \frac{h}{t}\vec{e_i}\right) - f(x)}{h/t} = t^{\alpha-1}\partial_{x_i} f(x).$$

Fissiamo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e defininiamo la funzione $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ come

$$g(t) = f(tx) - t^\alpha f(x).$$

Siccome f è omogeneo abbiamo che g è identicamente nulla e lo stesso dicasi per la sua derivata g'. Deriviamo rispetto a t ottenendo

$$0 = g'(t) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f(tx)x_i - \alpha t^{\alpha-1} f(x).$$

Scegliendo $t = 1$ otteniamo

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f(x) x_i - \alpha f(x).$$

ovvero

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha f(x).$$

$\square$

4 Esercizi visti il 14 novembre 2023

Esercizio 27. [1, Esercizio 7.2] Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(-\ln(x^2+y^2))^{\frac{1}{2}} \text{ se } 0 < x^2+y^2 < 1, \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

i) Stabilire se $f \in C^1(A)$.

ii) Provare che esistono $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$.

iii) Stabilire se $f \in C^2(A)$.

Svolgimento. i) É chiaro che $f \in C^\infty(A \setminus \{(0,0)\})$. Vediamo che $f \in C(A)$ mostrando che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$. Passando in coordinate polari abbiamo

$$\left|\rho^2 \cos(\theta)\sin(\theta)(-\ln(\rho^2))^{\frac{1}{2}}\right| \le \left|\rho^2(-\ln(\rho^2))^{\frac{1}{2}}\right| = \sqrt{2}\left|\rho^2\sqrt{|\ln(\rho)|}\right| \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

Vediamo se esistono le derivate parziali: per $(x, y) \neq (0, 0)$ possiamo con un conto "facile" trovarci le derivate parziali che sono

$$f_x(x,y) = -\frac{y((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)+x^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}}, \quad f_y(x,y) = -\frac{x((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{-\ln(x^2+y^2)}}$$

Vediamo che queste derivate sono continue anche in $(0, 0)$. Calcoliamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x, y)$. Passando in coordinate polari abbiamo

$$\left|\frac{\rho\sin(\theta)(\rho^2\ln(\rho^2)+\rho^2\cos^2(\theta))}{\rho^2\sqrt{|\ln(\rho^2)|}}\right| \le \left|\frac{2\rho\ln(\rho)}{\sqrt{2}\sqrt{|\ln(\rho)|}}\right| + \left|\frac{\rho}{\sqrt{2}\sqrt{|\ln(\rho)|}}\right| \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

Quindi $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x, y) = 0$ Allo stesso modo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x, y) = 0$. Calcoliamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

Quindi le derivate parziali del primo ordine sono continue su A e, in definitiva, $f \in C^1(A)$.

ii) Anche qui fuori da $(0, 0)$ tutto va bene. Abbiamo che (con un conto "semplice")

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{xy(x^2-(x^2+3y^2)\ln(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2(-\ln(x^2+y^2))^{\frac{3}{2}}}, \quad f_{yy}(x,y) = -\frac{xy(y^2-(y^2+3x^2)\ln(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2(-\ln(x^2+y^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Calcoliamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \quad \lim_{h\to 0}\frac{f_y(0,h)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

Facendo come prima passando in coordinate polari otteniamo

$$\left|\frac{\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta)(\rho^2\cos^2(\theta)-(\rho^2\cos^2(\theta)+3\rho^2\sin^2(\theta))\ln(\rho^2))}{\rho^4(-\ln(\rho^2))^{\frac{3}{2}}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin(\theta)\cos(\theta)(\cos^2(\theta)-(\cos^2(\theta)+3\sin^2(\theta))\ln(\rho^2))}{(-\ln(\rho^2))^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \left|\frac{1}{(-\ln(\rho^2))^{\frac{3}{2}}}\right| + 1000\left|\frac{\ln(\rho^2)}{(-\ln(\rho^2))^{\frac{3}{2}}}\right| \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

Lo stesso vale per f_{yy}: ciò ci dice che $f_{xx}, f_{yy} \in C(A)$.

iii) Vediamo che $f \notin C^2(A)$ studiamo f_{yx}. Abbiamo che lontano da $(0,0)$ si ha

$$f_{yx}(x,y) = \frac{-x^2y^2-(x^2+y^2)^2\ln^2(x^2+y^2)-(x^4+y^4)\ln(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2(-\ln(x^2+y^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Vediamo che questa funzione non può essere estesa con continuità in $(0,0)$: prendiamo la traiettoria $y=x$: abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x^4-(2x^2)^2\ln^2(2x^2)-(2x^4)\ln(2x^2)}{(2x^2)^2(-\ln(2x^2))^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{-1-4\ln^2(2x^2)-2\ln(2x^2)}{4(-\ln(2x^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Poniamo ora $t = -\ln(2x^2)$: se $x\to 0$ allora $t\to+\infty$: studiamo quindi il limite

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{-1-4t^2+2t}{4t^{\frac{3}{2}}} = -\infty$$

Quindi f_{yx} non può essere estesa in continuità in $(0,0)$: segue che $f \notin C^2(A)$.

□

Esercizio 28. [1, Esercizio 7.5] Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)\cos(ny)}{n2^n}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Stabilire se esiste una costante $\delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ e $|y| < \delta$ allora si abbia $f(x,y) \geq x$.

Svolgimento. Abbiamo che

$$|f(x,y)| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{|\sin(nx)|}{n2^n}.$$

Ci restringiamo ora al caso in cui $x > 0$. Lì abbiamo che $\sin(nx) < nx$. Segue che

$$|f(x,y)| \leq \sum_{n\geq 1}\frac{|\sin(nx)|}{n2^n} < \sum_{n\geq 1}\frac{nx}{n2^n} = x\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n} = x$$

Ricapitolando se $x > 0$ si ha che

$$|f(x,y)| < x.$$

Ma allora ciò implica che se $x > 0$ allora

$$f(x,y) < x.$$

Quindi non possiamo mai avere un δ come nel testo dell'esercizio. □

Esercizio 29. [3, Esercizio di pagina 65] Sia $\beta \geq 0$ un parametro e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\beta |y|}{|x|+\sqrt{|y|}} \text{ se } x \neq 0 \\ 0 \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

Calcolare tutti i $\beta \geq 0$ tali che:

i) f sia continua in $0 \in \mathbb{R}^2$.

ii) f sia continua su tutto $\mathbb{R}^2$.

iii) f abbia tutte le derivate direzionali in $0 \in \mathbb{R}^2$.

iv) f sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Svolgimento. i) Abbiamo (siccome $\frac{|y|}{|x|+\sqrt{|y|}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{|y|}} = \sqrt{|y|}$) che

$$\frac{|x|^\beta |y|}{|x| + \sqrt{|y|}} \leq |x|^\beta \sqrt{|y|}$$

e se $\beta \geq 0$ questo tende sempre a 0 per $(x, y) \to (0, 0)$. In conclusione f è continua in $0 \in \mathbb{R}^2$ per ogni $\beta \geq 0$.

ii) Dalla definizione di f si vede che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\})$ per ogni $\beta \geq 0$. Vediamo per quali β è continua ovunque. Osserviamo dal punto precedente che se $\beta > 0$ allora per $(x, y) \to (0, \overline{y})$ si ha che $f(x, y)$ tende a 0. Ci resta da capire cosa accade per $\beta = 0$. Vogliamo quindi studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,\overline{y})} \frac{|y|}{|x| + \sqrt{|y|}}$$

Scegliamo la traiettoria $(x, y) = (t, \overline{y})$. Studiamo quindi il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\overline{y}|}{|t| + \sqrt{|\overline{y}|}} = \sqrt{|\overline{y}|}$$

Ma se $\overline{y} \neq 0$ allora questo non è mai nullo. In definitiva f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ per ogni $\beta > 0$.

iii) Fissiamo una direzione $\mathbb{R}^2 \ni v = (v_1, v_2)$. Dalla definizione di derivata direzionale studiamo quindi il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|hv_1|^\beta |hv_2|}{h(|hv_1| + \sqrt{|hv_2|})} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\beta+1}|v_1|^\beta |v_2|}{h|h|^{\frac{1}{2}}(|h|^{\frac{1}{2}}|v_1| + |v_2|^{\frac{1}{2}})} \tag{4}$$

Discutiamo a parte ora il caso in cui $v_2 = 0$. Allora abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

per ogni $\beta \geq 0$. Possiamo quindi restringerci al caso $v_2 \neq 0$. Ripartendo da (4) abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\beta+\frac{1}{2}}}{h} \lim_{h\to 0} \frac{|v_1|^\beta |v_2|}{|h|^{\frac{1}{2}}|v_1| + |v_2|^{\frac{1}{2}}} = \frac{|v_1|^\beta |v_2|}{|v_2|^{\frac{1}{2}}} \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\beta+\frac{1}{2}}}{h}.$$

Distinguiamo quindi tre casi: $\beta > \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ e $0 \le \beta < \frac{1}{2}$. Per $\beta > \frac{1}{2}$ è chiaro che questo limite esiste ed è sempre nullo, indipendentemente dal vettore v scelto. Per $0 \le \beta < \frac{1}{2}$ è altrettanto chiaro che questo limite non esiste, ovvero la derivata direzionale non esiste. Analogamente per $\beta = \frac{1}{2}$ abbiamo che $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ non esiste. In definitiva f ammette qualsiasi derivata direzionale in $0 \in \mathbb{R}^2$ se e solo se $\beta > \frac{1}{2}$.

iv) Usiamo il test della differenziabilità: studiamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle f(0,0), (x,y)\rangle}{|(x,y)|}.$$

Dal punto *iii*) abbiamo che che dobbiamo restringerci al caso $\beta > \frac{1}{2}$ e in tal caso $\nabla f(0,0) = 0$. Ci resta da studiare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|(x,y)|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\beta |y|}{(|x| + \sqrt{|y|})\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Maggiorando come nel punto *i*) abbiamo

$$\frac{|x|^\beta |y|}{(|x| + \sqrt{|y|})\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|^\beta \sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(x^2)^{\frac{\beta}{2}}(y^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = (x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}.$$

Questo tende senz'altro a 0 quando $(x,y) \to (0,0)$ se $\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} > 0$ ovvero se $\beta > \frac{1}{2}$. In definitiva f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\beta > \frac{1}{2}$.

□

Esercizio 30. [3, Parte dell'esercizio di pagina 71] Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^4+|y|^3} \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia continua.

Svolgimento. L'unico punto che ci crea problemi è l'origine: vogliamo quindi capire per quali $\alpha > 0$ si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Cerchiamo di escludere qualche caso prendendo delle traiettorie specifiche, ad esempio delle rette $(x,y) = (t, mt)$. Per comodità prendiamo sia m che t positivi. Studiamo quindi il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{t(mt)^\alpha}{t^4 + (mt)^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{\alpha+1}m^\alpha}{t^3(m^3+t)} = \lim_{t\to 0} t^{\alpha+1-3} \lim_{t\to 0} \frac{m^\alpha}{m^3+t} = m^{\alpha-3} \lim_{t\to 0} t^{\alpha-2}.$$

Se supponiamo che $\alpha < 2$ abbiamo che questo limite non è nullo: f non può essere continua; se $\alpha = 2$ abbiamo invece un limite che dipende da m e quindi dalla traiettoria scelta. Se invece $\alpha > 2$ allora il limite è nullo quindi f in quel caso *può* essere continua. Restringiamoci quindi al caso $\alpha > 2$. Abbiamo

$$\left|\frac{x|y|^\alpha}{x^4+|y|^3}\right| = \frac{|x||y|^\alpha}{x^4+|y|^3} = \frac{(x^4)^{\frac{1}{4}}(|y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{x^4+|y|^3} \le \frac{(x^4+|y|^3)^{\frac{1}{4}}(x^4+|y|^3)^{\frac{\alpha}{3}}}{x^4+|y|^3} = (x^4+|y|^3)^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{3}-1}.$$

Se mandiamo (x,y) a $(0,0)$ questa quantità tende senz'altro a 0 se $\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} - 1 > 0$ ovvero se $\alpha > \frac{9}{4}$. Abbiamo quindi provato che f è continua se $\alpha > \frac{9}{4} > 2$. Ci resta da studiare il caso

$2 < \alpha \leq \frac{9}{4}$. Calcoliamo il limite lungo una specifica traiettoria $(x, y) = (t, t^{\frac{4}{3}})$. Per comodità scegliamo $t > 0$. Studiamo quindi il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{t t^{\frac{4\alpha}{3}}}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} t^{1 + \frac{4\alpha}{3} - 4} \tag{5}$$

Ma se $\alpha \leq \frac{9}{4}$ abbiamo per l'esponente di t che

$$1 + \frac{4\alpha}{3} - 4 \leq 1 + \frac{9}{3} - 4 \leq 0$$

e questo ci dice che il limite in (5) non è mai nullo per $\alpha \leq \frac{9}{4}$. In definitiva f è continua se e solo se $\alpha > \frac{9}{4}$. □

5 Esercizi visti il 21 novembre 2023

Esercizio 31. [1, Esercizio 8.2] Al variare del parametro $\lambda \geq 0$ si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2} y^4.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Svolgimento. Cerchiamo i punti critici di f: vediamo chi è il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = \left(2x + \lambda y, \lambda x + 2y^3\right).$$

Quindi (x, y) è un punto critico per f se e solo se

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ \lambda x + 2y^3 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Studiamo prima il caso $\lambda = 0$. Allora le equazioni di (6) implicano che $(x, y) = (0, 0)$ è l'unico punto critico per f se $\lambda = 0$. Possiamo quindi ridurci al caso $\lambda > 0$. Osserviamo immediatamente che se uno tra x e y è nullo allora necessariamente anche altro deve esserlo. Quindi $(x, y) = (0, 0)$ è un punto critico per f per ogni $\lambda > 0$. Possiamo quindi ridurci al caso $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\lambda > 0$. Dalla prima equazione otteniamo che

$$x = -\frac{\lambda}{2} y.$$

Sostituiamo nella seconda equazione di (6) ottenendo

$$\lambda \left(-\frac{\lambda}{2} y\right) + 2y^3 = 0.$$

Ovvero

$$4y^3 - \lambda^2 y = 0$$

visto che $y \neq 0$ possiamo dividere per y ottenendo

$$4y^2 - \lambda^2 = 0$$

ovvero

$$(2y - \lambda)(2y + \lambda) = 0$$

da cui otteniamo le soluzioni

$$y_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad y_2 = -\frac{\lambda}{2}$$

e le corrispondenti "ascisse"

$$x_1 = -\frac{\lambda^2}{4}, \quad x_2 = \frac{\lambda^2}{4}.$$

Ricapitolando abbiamo che f ha i seguenti punti critici:

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \quad (x_1, y_1) = \left(-\frac{\lambda^2}{4}, \frac{\lambda}{2}\right), \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{\lambda^2}{4}, -\frac{\lambda}{2}\right).$$

dove $\lambda \geq 0$. Vediamo quanto vale f in ciascuno di questi punti: abbiamo

$$f(x_0, y_0) = 0$$

$$f(x_1, y_1) = \left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)^2 + \lambda\left(-\frac{\lambda^2}{4}\right)\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 = -\frac{\lambda^4}{32}$$

$$f(x_2, y_2) = \left(\frac{\lambda^2}{4}\right)^2 + \lambda\frac{\lambda^2}{4}\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^4 = -\frac{\lambda^4}{32}$$

Calcoliamo ora le derivate seconde (in modo da trovare l'hessiano): abbiamo che

$$f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_{xy}(x, y) = \lambda, \quad f_{yy}(x, y) = 6y^2.$$

L'hessiano è quindi dato da

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ \lambda & 6y^2 \end{pmatrix}$$

il suo determinante è

$$\det(H(x, y)) = 12y^2 - \lambda^2.$$

e la sua traccia è

$$\mathrm{tr}(H(x, y)) = 2 + 6y^2.$$

Osserviamo che la traccia è sempre positiva su tutto $\mathbb{R}^2$. Abbiamo che

$$\det(H(x_0, y_0)) = -\lambda^2$$

$$\det(H(x_1, y_1)) = 12\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2 = 2\lambda^2$$

$$\det(H(x_2, y_2)) = 12\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \lambda^2 = 2\lambda^2$$

Distinguiamo due casi: $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$. Studiamo il caso $\lambda = 0$. Abbiamo l'unico punto da studiare $(0, 0)$: l'hessiana lì è semidefinita positiva: quindi f può essere un punto di minimo. In effetti è un minimo globale visto che $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^4 > 0$ se e solo se $(x, y) \neq (0, 0)$. Ci resta da studiare il caso $\lambda > 0$. Abbiamo che $H(x_0, y_0)$ non è nè definita positiva nè definita negativa mentre $H(x_1, y_1)$ e $H(x_2, y_2)$ sono definite positive. Quindi, se $\lambda > 0$, (x_0, y_0) non è nè un punto di massimo nè un punto di minimo mentre (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono punti di minimo almeno locali. Vediamo che sono anche globali. Ricordiamo la disuguaglianza di Young ("con ε"): se $a, b > 0$ e $p, q > 0$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ abbiamo che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ciò vuol dire che per $c, d \in \mathbb{R}$ si ha

$$cd \leq \frac{|c|^p}{p} + \frac{|d|^q}{q}.$$

Ma allora per ogni $\varepsilon > 0$ "ridefinisco" $c = \frac{a}{\varepsilon}$ e $d = \varepsilon b$ e otteniamo che

$$ab \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \frac{|a|^p}{p} + \varepsilon^q \frac{|b|^q}{q}.$$

Fissiamo $p = 4$: segue che $q = \frac{4}{3}$ e quindi nel nostro caso abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$-xy \leq \frac{4}{3} \frac{1}{\varepsilon^{4/3}} |x|^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{4} \varepsilon^4 y^4$$

ovvero

$$\lambda xy \geq -\lambda \frac{4}{3} \frac{1}{\varepsilon^{4/3}} |x|^{\frac{4}{3}} - \lambda \frac{1}{4} \varepsilon^4 y^4$$

da cui

$$f(x, y) = x^2 + \lambda xy + \frac{1}{2} y^4 \geq x^2 - \lambda \frac{4}{3} \frac{1}{\varepsilon^{4/3}} |x|^{\frac{4}{3}} - \lambda \frac{1}{4} \varepsilon^4 y^4 + \frac{1}{2} y^4 = x^2 - \frac{\lambda 4}{3\varepsilon^{4/3}} |x|^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda \varepsilon^4}{4} \right) y^4.$$

Scegliamo ora $\varepsilon = \frac{1}{100\lambda^{\frac{1}{4}}}$. Segue che $\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda\varepsilon^4}{4} \right) > 0$ e quindi

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x, y) = +\infty$$

. Ma allora per ogni $R > 0$ l'insieme

$$K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq R\}$$

è chiuso e limitato (quindi f ammette minimo assoluto lì). Ma allora per ogni $R > 0$ si ha

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = \min_{K_R} f$$

da cui otteniamo che (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono minimi assoluti. □

Esercizio 32. [1, Esercizio 8.3] Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy.$$

Determinare i punti critici di f ed eventuali punti di minimo/massimo locale/globale.

Svolgimento. Cerchiamo i punti critici di f: vediamo chi è il gradiente di f:

$$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 + 3\alpha y, -3y^2 + 3\alpha x\right).$$

Quindi (x, y) è un punto critico per f se e solo se

$$\begin{cases} x^2 + \alpha y = 0 \\ -y^2 + \alpha x = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Osserviamo che se uno tra x e y allora anche l'altro lo è e soddisfano le equazioni in (7) quindi $(x, y) = (0, 0)$ è un punto critico per f per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi supporre $x \neq 0 \neq y$.

Osserviamo inoltre che se $\alpha = 0$ l'unico punto critico è $(0,0)$ quindi possiamo supporre $\alpha \neq 0$. Dalla prima equazione otteniamo

$$y = -\frac{x^2}{\alpha}.$$

Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$-\left(-\frac{x^2}{\alpha}\right)^2 + \alpha x = 0$$

ovvero

$$-\frac{x^4}{\alpha^2} + \alpha x = 0$$

e visto che $x \neq 0$ e $\alpha \neq 0$ possiamo scrivere

$$-x^3 + \alpha^3 = 0$$

da cui otteniamo la soluzione

$$x_1 = \alpha.$$

Troviamo la corrispondente "ordinata" come

$$y_1 = -\frac{\alpha^2}{\alpha} = -\alpha.$$

Abbiamo quindi i punti critici

$$(x_0, y_0) = (0,0), \quad (x_1, y_1) = (\alpha, -\alpha)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$. I corrispondenti valori di f sono

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f(x_1, y_1) = -\alpha^3.$$

Troviamo le derivate seconde:

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy} = 3\alpha, \quad f_{yy} = -6y.$$

L'hessiano è quindi dato da

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 3\alpha \\ 3\alpha & -6y \end{pmatrix}$$

il suo determinante è

$$\det(H(x,y)) = -36xy - 9\alpha^2 = -9(4xy + \alpha^2).$$

e la sua traccia è

$$\operatorname{tr}(H(x,y)) = 6x - 6y = 6(x-y).$$

Abbiamo

$$\det(H(x_0,y_0)) = -9\alpha^2, \quad \operatorname{tr}(H(x_0,y_0)) = 0$$

e

$$\det(H(x_1,y_1)) = 27\alpha^2, \quad \operatorname{tr}(H(x_1,y_1)) = 12\alpha.$$

Discutiamo prima il caso $\alpha = 0$. In $(0,0)$ sia traccia che determinante sono nulli. Osserviamo che $g_1(x) = f(x,0)$ e $g_2(y) = f(0,y)$ sono crescenti quindi $(0,0)$ è un punto di sella. Vediamo ora il caso $\alpha \neq 0$. In (x_0, y_0) abbiamo che il determinante è negativo e la traccia è nulla quindi l'hessiana non è nè definita positiva nè definita negativa: ciò ci dice che $(0,0)$ è un punto di sella. Distinguiamo ora ulteriormente due casi: $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. Nel primo caso in (x_1, y_1) sia il determinante che la traccia sono positivi quindi (x_1, y_1) è un punto di minimo (almeno) locale. Vediamo che non è globale perche

$$\lim_{y \to +\infty} f(0, y) = -\infty.$$

Se invece $\alpha < 0$ il determinante è positivo e la traccia è negativa: ciò ci dice che (x_1, y_1) è un punto di massimo (almeno) locale. Vediamo che non è globale perche

$$\lim_{x \to \infty} f(x, 0) = +\infty.$$

□

Esercizio 33. [1, Esercizio 8.4] Siano $\beta > 0$ un parametro, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ il disco chiuso ed $f : K \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - \beta xy.$$

i) Calcolare tutti i punti crtici di f interni a K.

ii) Calcolare tutti i punti di minimo assoluto di f in K.

Svolgimento. i) (x, y) è un punto critico per f su $\mathbb{R}^2$ se $\nabla f(x, y) = (0, 0)$. Calcoliamo il gradiente.

$$\nabla f(x, y) = (4x^3 + 4xy^2 - \beta y, 4y^3 + 4x^2 y - \beta x).$$

Otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 - \beta y = 0 \\ 4y^3 + 4x^2 y - \beta x = 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni otteniamo

$$4(x^3 + y^3) + 4xy(y + x) - \beta(y + x) = 0$$

ovvero

$$4(x + y)(x^2 - xy + y^2) + (x + y)(4xy - \beta) = 0$$

i.e.

$$(x + y)(4x^2 - 4xy + 4y^2 + 4xy - \beta) = 0$$

cioè

$$(x + y)(4x^2 + 4y^2 - \beta) = 0$$

Da cui otteniamo che o $x + y = 0$ oppure $4x^2 + 4y^2 - \beta = 0$. Se $x = -y$ allora dalla prima equazione otteniamo

$$8x^3 + \beta x = 0$$

Da cui otteniamo l'unica soluzione $x_0 = 0$ (visto che $\beta > 0$) e quindi il corrispondente punto critico $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Se invece $4x^2 + 4y^2 = \beta$ sostituendo nella prima equazione troviamo

$$4x^3 + 4xy^2 - (4x^2 + 4y^2)y = 0$$

ovvero

$$4x^3 + 4xy^2 - 4x^2 y - 4y^3 = 0$$

i.e.
$$x^2(x-y)+y^2(x-y)=0 \Rightarrow (x^2+y^2)(x-y)=0$$
e ciò ci impone $x=y$. Sostituendo nuovamente nella prima equazione otteniamo
$$8x^3-\beta x=0$$
da cui, oltre alla soluzione $(0,0)$, troviamo
$$x_1=\sqrt{\frac{\beta}{8}}, \quad x_2=-\sqrt{\frac{\beta}{8}}.$$
e quindi le corrispondenti soluzioni
$$(x_1,y_1)=\left(\sqrt{\frac{\beta}{8}},\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right), \quad (x_2,y_2)=\left(-\sqrt{\frac{\beta}{8}},-\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)$$
Queste soluzioni appartegono a K se e solo se
$$\left(\pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)^2+\left(\pm\sqrt{\frac{\beta}{8}}\right)^2 \le 1 \Rightarrow \beta \le 4.$$
Ricapitolando: per ogni $\beta > 0$ f ammette su K l'origine come punto critico; inoltre, se $\beta \le 4$, allora ammette anche gli altri due punti critici (x_1,y_1) e (x_2,y_2).

ii) Vediamo quanto vale f nei tre punti che abbiamo trovato prima:
$$f(x_0,y_0)=0$$
$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)=-\frac{\beta^2}{16}<0.$$
Distinguiamo tre casi: $0<\beta<4$, $\beta=4$, $\beta>4$.
Caso $0<\beta<2$*:* Mostriamo che gli unici due punti di minimo assoluto su K sono (x_1,y_1) e (x_2,y_2). Passiamo f in coordinate polari:
$$f(\rho,\theta)=\rho^4-\beta\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta).$$
Non è difficile vedere che si ha $\cos(\theta)\sin(\theta)\le\frac{1}{2}$. Abbiamo quindi che
$$f(\rho,\theta)=\rho^4-\beta\rho^2\cos(\theta)\sin(\theta)\ge\rho^4-\frac{\beta}{2}\rho^2$$
Studiamo la funzione (per $t>0$)
$$g(t)=t^4-\frac{\beta}{2}t^2$$
studiando la derivata abbiamo che essa ha un minimo in $t=\sqrt{\frac{\beta}{4}}$ quindi
$$f(\rho,\theta)\ge g\left(\sqrt{\frac{\beta}{4}}\right)=\frac{\beta^2}{16}-\frac{\beta}{2}\frac{\beta}{4}=-\frac{\beta^2}{16}.$$

Se mostriamo che f sul bordo di K ha un valore maggiore di quello raggiunto in (x_1, y_1) e (x_2, y_2) possiamo concludere che se $0 < \beta < 4$ allora f ammette due soli minimi assoluti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) su K. Ma questo è vero perchè

$$f(1, \theta) = 1 - \beta \cos(\theta) \sin(\theta) \geq 1 - \frac{\beta}{2}.$$

Se mostriamo che, per $0 < \beta < 4$, si ha che

$$1 - \frac{\beta}{2} > -\frac{\beta^2}{16}$$

allora abbiamo concluso. Ma ciò è vero visto che

$$16 - 8\beta + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow (\beta - 4)^2 > 0$$

Caso $\beta = 4$: Qui $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ sono sul bordo di K. Sfruttando quello che abbiamo visto prima abbiamo

$$f(1, \theta) = 1 - 4\cos(\theta) \sin(\theta) \geq -1.$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ovvero quando ritroviamo $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Quindi anche in questo caso ci sono solo quei due punti che sono di minimo assoluto.
Caso $\beta > 4$: Qui l'unico punto critico è $(0, 0)$ quindi ci resta da verificare cosa accade sul bordo di K: abbiamo

$$f(1, \theta) = 1 - \beta \cos(\theta) \sin(\theta) \geq 1 - \frac{\beta}{2}$$

con uguaglianza se e solo se $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{5\pi}{4}$. Ovvero nei punti $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Lo studio della funzione g in uno dei casi precedenti ci fa concludere che questi due punti sono gli unici punti di minimo assoluti su K.

□

Esercizio 34. [1, Esercizio 8.6] In dipendenza dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = e^{x+y} + x^2 + \alpha xy + y^2.$$

1. Determinare tutti i valori di α tali che f sia convessa su tutto $\mathbb{R}^2$.
2. Per ciascun $\alpha \in [-2, 2]$ discutere esistenza e unicità di punti di minimo di f.

Svolgimento. 1. Usiamo la caratterizzazione di convessità data da [2, Teorema 6.12.7]: ovvero vogliamo vedere per quali α la funzione ha hessiana semidefinita positiva. Calcoliamo le derivate prime e seconde:

$$f_x(x, y) = e^{x+y} + 2x + \alpha y, \quad f_y(x, y) = e^{x+y} + \alpha x + 2y$$

$$f_{xx}(x, y) = e^{x+y} + 2, \quad f_{xy}(x, y) = e^{x+y} + \alpha, \quad f_{yy}(x, y) = e^{x+y} + 2.$$

L'Hessiana è quindi data da

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} + 2 & e^{x+y} + \alpha \\ e^{x+y} + \alpha & e^{x+y} + 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo determinante e traccia.

$$\det(Hf(x,y)) = (e^{x+y}+2)^2 - (e^{x+y}+\alpha)^2 = e^{2(x+y)} + 4 + 4e^{x+y} - e^{2(x+y)} - \alpha^2 - 2\alpha e^{x+y} =$$

$$= (4-2\alpha)e^{x+y} + 4 - \alpha^2$$

$$\mathrm{tr}(Hf(x,y)) = 2e^{x+y} + 4$$

La traccia è sempre positiva: vediamo per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $\det(Hf(x,y)) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Definiamo la funzione

$$g(t) = (4-2\alpha)e^t + 4 - \alpha^2$$

Distinguiamo tre casi: $\alpha > 2$, $\alpha < 2$ e $\alpha = 2$. Se $\alpha > 2$ allora

$$g(0) = 4 - 2\alpha + 4 - \alpha^2 = 8 - 2\alpha - \alpha^2 < 8 - 4 - 4 = 0$$

quindi se $\alpha > 2$ la funzione non può essere convessa. Se $\alpha = 2$ allora (g e quindi) il determinante è identicamente nullo quindi l'hessiano e semidefinito positivo e la funzione f è convessa. Ci rimane da vedere il caso in cui $\alpha < 2$. Studiamo la derivata $g'(t) = (4-2\alpha)e^t$: essa per $\alpha < 2$ è sempre positiva quindi g è crescente su $\mathbb{R}$. Studiamo

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = 4 - \alpha^2$$

Se vogliamo che la funzione sia convessa allora ci basta richiedere che $4 - \alpha^2 \geq 0$. Ovvero che $-2 \leq \alpha \leq 2$. In conclusione f è convessa se e solo se $-2 \leq \alpha \leq 2$.

2. Usiamo [2, Osservazione 6.12.8]. Se troviamo dei punti critici allora questi sono dei minimi globali. Abbiamo già calcolato il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = (e^{x+y} + 2x + \alpha y, e^{x+y} + \alpha x + 2y)$$

ciò ci impone il sistema

$$\begin{cases} e^{x+y} + 2x + \alpha y = 0 \\ e^{x+y} + \alpha x + 2y = 0 \end{cases}.$$

Sottraendo membro a membro otteniamo

$$(2-\alpha)x + (\alpha - 2)y = 0 \Rightarrow (2-\alpha)(x-y) = 0$$

da cui otteniamo $\alpha = 2$ oppure $x = y$. Se $\alpha = 2$ allora sommando membro a membro le due equazioni otteniamo

$$2e^{x+y} + 2(x+y) + 2(x+y) = 0 \Rightarrow e^{x+y} + 2(x+y) = 0$$

Consideriamo la funzione $g(t) = e^t + 2t$. La sua derivata è sempre positiva quindi g è crescente. Ma allora visto che $\lim_{t\to-\infty} g(t) = -\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ abbiamo che g ammette esattamente uno zero che chiameremo $\bar{t}$. Ma allora l'insieme

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \bar{t}\}$$

è un insieme in cui ogni punto al suo interno è un punto di minimo assoluto per f. Se invece abbiamo $x = y$ sostituendo nella prima equazione otteniamo

$$e^{2x} + (2+\alpha)x = 0$$

Consideriamo la funzione $h(t) = e^{2t} + (2+\alpha)t$. La sua derivata è $h'(t) = e^{2t} + 2 + \alpha$. Se $\alpha > -2$ allora questa è sempre positiva e quindi h è sempre crescente. Ragionando come prima osserviamo che esiste un unica soluzione $\bar{t}$. Quindi se $-2 < \alpha < 2$ f ammette un unico minimo globale dato da $(x, y) = (\bar{t}, \bar{t})$. Ci resta da studiare il caso $\alpha = -2$. Ma allora dovremmo risolvere l'equazione

$$e^{2x} = 0$$

il che è impossibile.

□

6 Esercizi visti il 12 dicembre 2023

Esercizio 35. [1, Esercizio 9.2] Calcolare la soluzione del seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+2x}{\cos(y)} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

Svolgimento. In maniera formale abbiamo che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+2x}{\cos(y)}$$

ovvero

$$\cos(y)dy = (1+2x)dx$$

integrando otteniamo

$$\int_\pi^y \cos(s)ds = \int_0^x (1+2t)dt$$

e quindi

$$[\sin(s)]_\pi^y = [t+t^2]_0^x$$

cioè

$$\sin(y) = x + x^2$$

per gli archi associati segue che

$$\sin(\pi - y) = x^2 + x$$

dunque

$$y = \pi - \arcsin(x + x^2).$$

Questa funzione è definita in un intorno di 0 se e solo se $-1 \leq x + x^2 \leq 1$. Abbiamo che $x + x^2 \geq -1$ è sempre verificata mentre $x + x^2 \leq 1$ è verificata se e solo se

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Quindi la soluzione massimale è data da $y(x) = \pi - \arcsin(x+x^2)$ sull'intervallo $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. "Giusto per scrupolo" osserviamo che $y(0) = \pi - \arcsin(0) = \pi$ e che

$$\frac{1+2x}{\cos(y(x))} = \frac{1+2x}{\cos(\pi - \arcsin(x+x^2))} = \frac{1+2x}{-\cos(\arcsin(x+x^2))} = \frac{1+2x}{-\sqrt{1-\sin(\arcsin(x+x^2))^2}} =$$

$$= -\frac{1+2x}{\sqrt{1-(x+x^2)^2}} = \frac{d}{dx}(\pi - \arcsin(x+x^2)).$$

Questo tipo di conti "per scrupolo" non è necessario ma a volte può essere utile farli per cercare eventuali errori.

□

Esercizio 36. [1, Esercizio 9.3] Calcolare la soluzione dei seguenti Problemi di Cauchy.

1.
$$\begin{cases} y' = \frac{y}{1+e^x} + e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y' = y^2 \ln(x+3) \\ y(-2) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Svolgimento. 1. L'equazione è lineare ovvero è del tipo $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$. In questo caso abbiamo

$$a(x) = -\frac{1}{1+e^x}, \quad b(x) = e^{-x}.$$

la soluzione è quindi data da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int_0^x b(s) e^{A(s)} ds \right)$$

dove

$$A(s) = \int_0^s a(t) dt.$$

Quindi abbiamo

$$A(s) = \int_0^s -\frac{1}{1+e^t} dt = -\int_0^s \frac{1+e^t-e^t}{1+e^t} dt = -\int_0^s dt + \int_0^s \frac{e^t}{1+e^t} dt$$

cambiamo la variabile $1 + e^t \to u (\Rightarrow e^t dt = du)$.

$$A(s) = -s + \int_2^{1+e^s} \frac{1}{u} du = -s + \ln(1+e^s) - \ln(2).$$

Abbiamo invece che

$$\int_0^x b(s)e^{A(s)} ds = \int_0^x e^{-s} e^{-s+\ln(1+e^s)-\ln(2)} ds = \int_0^x e^{-2s} e^{\ln(1+e^s)} e^{-\ln(2)} ds = \frac{1}{2} \int_0^x e^{-2s}(1+e^s) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x (e^{-2s}+e^{-s}) ds = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2s} \right]_0^x + \frac{1}{2} [-e^{-s}]_0^x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-x} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

Quindi

$$e^{-A(x)} \left(\int_0^x b(s) e^{A(s)} ds \right) = e^{x - \ln(1+e^x) + \ln(2)} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right)$$

ovvero

$$y(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) = \frac{e^x}{1+e^x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} \right).$$

In particolare y è definita su tutto $\mathbb{R}$.

2. L'equazione è a variabili separabili: procedendo in maniera formale abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \ln(x+3)$$

ovvero

$$\frac{dy}{y^2} = \ln(x+3)dx$$

e quindi

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{y} \frac{ds}{s^2} = \int_{-2}^{x} \ln(t+3)dt$$

ovvero

$$\left[-\frac{1}{s}\right]_{-\frac{1}{2}}^{y} = \int_{1}^{x+3} \ln(r)dr$$

i.e.

$$-2 - \frac{1}{y} = [r\ln(r)]_1^{x+3} - \int_1^{x+3} dr$$

cioè

$$-2 - \frac{1}{y} = (x+3)\ln(x+3) - (x+3-1)$$

ovvero

$$-\frac{1}{y} = (x+3)\ln(x+3) - x$$

e infine

$$y = \frac{1}{x - (x+3)\ln(x+3)}$$

Vediamo su quale intervallo la soluzione è definita. Necessariamente abbiamo bisogno che $x > -3$. Vediamo che ciò è sufficiente. Sia $f(x) = x - (x+3)\ln(x+3)$. Vediamo che per $x > -3$ f non si annulla mai. Studiamo la derivata: $f'(x) = 1 - (x+3)\frac{1}{x+3} + \ln(x+3) = \ln(x+3)$. Quindi f' si annulla in -2, è positiva per $x > -2$ e negativa per $-3 < x < -2$. In altre parole -2 è un massimo per f. Ma $f(-2) = -2 < 0$ quindi f non si annulla mai. In definitiva la soluzione massimale y è definita sull'intervallo $(-3, +\infty)$.

$\square$

Esercizio 37. [1, Esercizio 9.4] Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x+y+3) \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Svolgimento. Definiamo $y_1(x) = y(x) + x + 3$. Abbiamo quindi che $\sin(x+y+3) = \sin(y_1)$, $y_1(0) = y(0) + 0 + 3 = 0$, $y_1'(x) = y'(x) + 1$ e quindi il Problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} y_1' = \sin(y_1) + 1 \\ y_1(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili: procedendo in maniera formale abbiamo

$$\frac{dy_1}{dx} = \sin(y_1) + 1$$

ovvero

$$dx = \frac{dy_1}{\sin(y_1) + 1}$$

e quindi integrando

$$\int_0^x dt = \int_0^{y_1} \frac{ds}{\sin(s) + 1}$$

Concentriamoci sul lato di destra e abbiamo

$$\int_0^{y_1} \frac{ds}{\sin(s)+1} = \int_0^{y_1} \frac{ds}{\sin(s)+1}\frac{1-\sin(s)}{1-\sin(s)} = \int_0^{y_1} \frac{1-\sin(s)}{1-\sin^2(s)}ds = \int_0^{y_1} \frac{1-\sin(s)}{\cos^2(s)}ds =$$

$$= \int_0^{y_1} \frac{ds}{\cos^2(s)} - \int_0^{y_1} \frac{\sin(s)}{\cos^2(s)}ds$$

Per il primo integrale sostituiamo $u = \tan(s)$ quindi $du = \frac{ds}{\cos^2(s)}$; per il secondo sosituiamo $v = \cos(x)$ quindi $dv = -\sin(s)ds$. Quindi abbiamo

$$\int_0^{\tan(y_1)} du + \int_1^{\cos(y_1)} \frac{dv}{v^2} = [u]_0^{\tan(y_1)} - \left[\frac{1}{v}\right]_1^{\cos(y_1)} = \tan(y_1) - \frac{1}{\cos(y_1)} + 1$$

Quindi

$$x = \tan(y_1) - \frac{1}{\cos(y_1)} + 1$$

e ricordando $y_1 = y + x + 3$ abbiamo la soluzione implicita.

$$x = \tan(y+x+3) - \frac{1}{\cos(y+x+3)} + 1$$

□

Esercizio 38. [1, Esercizio 9.5] Si consideri l'equazione differenziale

$$(1-\cos(y))y' = x\sin(x)\sin(y)$$

1. Determinare tutte le soluzioni costanti;
2. Calcolare (in forma implicita) l'integrale generale;
3. Calcolare la soluzione che verifica la condizione iniziale $y(0) = \frac{5}{2}\pi$.

Svolgimento. 1. Prendiamo la soluzione costante $y(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$: sostituendo nell'equazione otteniamo

$$0 = x\sin(x)\sin(c)$$

Osserviamo ora che $\sin(c) \neq 0$ allora dovremmo richiedere che l'equazione $x\sin(x) = 0$ sia vera per ogni $x \in \mathbb{R}$ ma ciò è falso. Se invece $\sin(c) = 0$ allora l'equazione è risolta quindi le soluzioni costanti dell'equazione sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(x) = k\pi, \qquad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

2. L'equazione è a variabili separiabili: abbiamo

$$y' = (x\sin(x))\left(\frac{\sin(y)}{1-\cos(y)}\right)$$

procedendo in maniera formale abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = (x\sin(x))\left(\frac{\sin(y)}{1-\cos(y)}\right)$$

e quindi

$$\frac{1-\cos(y)}{\sin(y)}dy = x\sin(x)dx$$

integrando
$$\int \frac{1-\cos(y)}{\sin(y)}dy = \int x\sin(x)dx$$
Concentriamoci sul primo integrale:
$$\int \frac{1-\cos(y)}{\sin(y)}dy = \int \frac{1}{\sin(y)}dy - \int \frac{\cos(y)}{\sin(y)}dy = \int \frac{\sin(y)}{\sin^2(y)}dy - \int \frac{du}{u}$$
dove abbiamo fatto il cambio di variabile $u = \sin(y)$. Ora abbiamo
$$-\int \frac{du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\sin(y)|$$
$$\int \frac{\sin(y)}{\sin^2(y)}dy = \int \frac{\sin(y)}{1-\cos^2(y)}dy = -\int \frac{v}{1-v^2}dv$$
dove abbiamo fatto il cambio di variabile $v = \cos(x)$. Abbiamo ora
$$\frac{v}{1-v^2} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v} = \frac{A(1+v)+B(1-v)}{1-v^2} = \frac{(A+B)+(A-B)v}{1-v^2}$$
da cui $A = B = \frac{1}{2}$. Quindi
$$-\int \frac{v}{1-v^2}dv = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+v}dv - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-v}dv = -\frac{1}{2}\ln|1+v| - \frac{1}{2}\ln|1-v|$$
In definitiva per il lato sinistro dell'equazione otteniamo
$$-\frac{1}{2}\ln|1+\cos(y)| - \frac{1}{2}\ln|1-\cos(y)| - \ln|\sin(y)|$$
Per il lato destro dell'equazione integriamo per parti
$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x)$$
Quindi l'integrale generale è dato da
$$\sin(x) - x\cos(x) + \frac{1}{2}\ln|1+\cos(y)| + \frac{1}{2}\ln|1-\cos(y)| + \ln|\sin(y)| = c$$
dove $c \in \mathbb{R}$.

3. Usiamo ora l'informazione $y(0) = \frac{5}{2}\pi$. Sostituiamo nell'integrale generale e otteniamo
$$\sin(0) - 0\cos(0) + \frac{1}{2}\ln|1+\cos(\tfrac{5}{2}\pi)| + \frac{1}{2}\ln|1-\cos(\tfrac{5}{2}\pi)| + \ln|\sin(\tfrac{5}{2}\pi)| = c$$
da cui $c = 0$.

$\square$

Esercizio 39. [1, Esercizio 9.8] Calcolare la soluzione $y \in C^1(a,b)$, $-\infty \le a < 1 < b \le \infty$, del Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \frac{y-x}{y+x}, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$
e disegnare un grafico qualitativo di y. Calcolare b e mostrare che $a > -\frac{1}{2}e^{-\pi/2}$.

Svolgimento. Procediamo in maniera formale: facciamo la sostituzione $y_1(x) = \frac{y(x)}{x}$ ($\Rightarrow y(x) = y_1(x)x$). Abbiamo che $y'(x) = y_1'(x)x + y_1(x)$. Quindi il Problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} y_1'(x)x + y_1(x) = \frac{y_1(x)x - x}{y_1(x)x + x}, \\ y_1(1) = 0. \end{cases}$$

Quindi l'equazione differenziale diventa

$$y_1'x + y_1 = \frac{y_1 - 1}{y_1 + 1}$$

ovvero

$$y_1' = \left(\frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} - y_1\right)\frac{1}{x}$$

L'equazione è a variabili separabili quindi abbiamo

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(\frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} - y_1\right)\frac{1}{x}$$

e

$$dy_1\left(\frac{y_1 - 1}{y_1 + 1} - y_1\right)^{-1} = \frac{dx}{x}$$

cioè

$$-\frac{1 + y_1}{1 + y_1^2}dy_1 = \frac{dx}{x}$$

e integrando abbiamo

$$-\int_0^{y_1}\frac{1 + t}{1 + t^2}dt = \int_1^x \frac{ds}{s}$$

Concentriamoci sul primo integrale:

$$-\int_0^{y_1}\frac{1+t}{1+t^2}dt = -\int_0^{y_1}\frac{1}{1+t^2} - \int_0^{y_1}\frac{t}{1+t^2}dt = -\frac{1}{2}[\ln|1+t^2|]_0^{y_1} - [\arctan(t)]_0^{y_1} = -\frac{1}{2}\ln|1+y_1^2| - \arctan(y_1)$$

il secondo integrale ci dà invece

$$\int_1^x \frac{ds}{s} = [\ln(s)]_1^x = \ln|x|$$

quindi la soluzione è data da

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1 + y_1^2| - \arctan(y_1)$$

e ricordando che $y_1 = y/x$ otteniamo

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ma

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1 + \frac{y^2}{x^2}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right| = -\frac{1}{2}\left(\ln|x^2 + y^2| - \ln|x^2|\right) = -\frac{1}{2}\ln|x^2 + y^2| + \ln|x|$$

quindi l'equazione diventa

$$0 = -\frac{1}{2}\ln|x^2 + y^2| - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Notiamo che però qui abbiamo un problema lungo l'asse delle y ovvero su $\{x = 0\}$ dovuto prevalentemente alla sostituzione che abbiamo fatto all'inizio $y_1 = y/x$. Notare che passando in cordinate polari otteniamo un'espressione più semplice: facciamo la sostituzione $y = r\sin(\theta)$, $x = r\cos(\theta)$. Ma ci restringiamo solo all'intervallo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ perchè lì abbiamo che $\arctan(\tan(\theta)) = \theta$ e lì non si annulla $x = r\cos(\theta)$. Otteniamo

$$0 = -\frac{1}{2}\ln|r^2| - \arctan(\tan(\theta))$$

ovvero

$$\ln(r) = -\theta$$

e quindi

$$r = e^{-\theta}$$

per $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$: ovvero ci fermiamo all'asse delle y come osservato prima. Osserviamo ora che forse ci sarebbe convenuto passare prima in coordinate polari: facciamo il cambio di coordinate $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$. Abbiamo, procedendo in maniera formale, che

$$dy(y + x) = dx(y - x)$$

e che

$$\begin{cases} dx = \cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta \\ dy = \sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione otteniamo

$$[\sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta][r\sin(\theta) + r\cos(\theta)] = [\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta][r\sin(\theta) - r\cos(\theta)]$$

svolgendo un po'di conti otteniamo

$$\sin^2(\theta)dr + r\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)dr + r\cos^2(\theta)d\theta =$$

$$= \sin(\theta)\cos(\theta)dr - r\sin^2(\theta)d\theta - \cos^2(\theta)dr + r\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta.$$

ovvero

$$\sin^2(\theta)dr + r\cos^2(\theta)d\theta = -r\sin^2(\theta)d\theta - \cos^2(\theta)dr.$$

cioè

$$dr + rd\theta = 0$$

i.e.

$$\frac{dr}{d\theta} = -r$$

ovvero

$$r' = -r$$

che ha per soluzione

$$r(\theta) = Ce^{-\theta}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Usiamo la condizione $y(1) = 0$ per calcolare C: ciò equivale a dire che la curva tracciata da $r(\theta) = Ce^{-\theta}$ deve passare per il punto $(1, 0)$. In altre parole l'equazione deve essere verificata quando $r = 1$ e $\theta = 0$. Richiediamo quindi

$$1 = Ce^{-0}$$

da cui $C = 1$. Vediamo quindi di far "tornare" alle coordinate cartesiane la curva in polari

$$r(\theta) = e^{-\theta}$$

Disegnamo la curva:

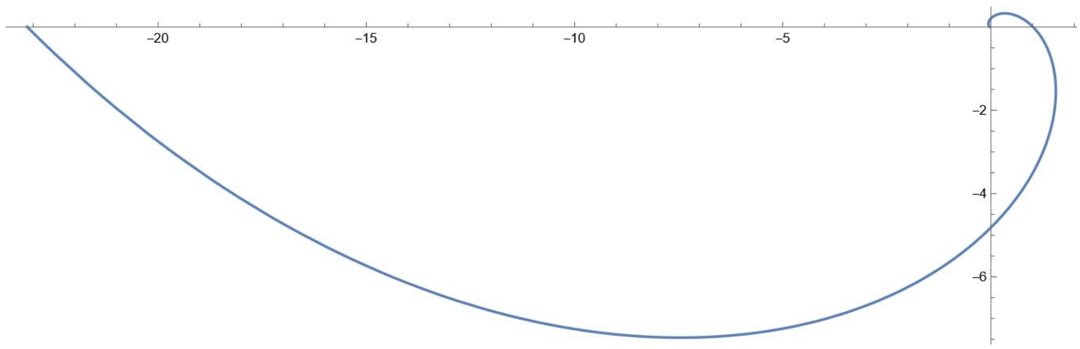

Figura 1: Grafico di $r(\theta) = e^{-\theta}$ per $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

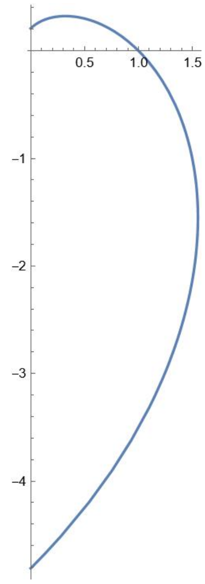

Figura 2: Grafico di $r(\theta) = e^{-\theta}$ per $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

Ora vogliamo scriverla, in un intorno del punto $(x, y) = (1, 0)$ come funzione del tipo $(x, y(x))$. Possiamo farlo, per il teorema delle funzioni implicite (o teorema di Dini), finche non incontriamo una derivata parallela all'asse delle y[1]. Calcoliamo la derivata: abbiamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{d\theta}r(\theta)\sin(\theta)}{\frac{d}{d\theta}r(\theta)\cos(\theta)} = \frac{-\sin(\theta) + \cos(\theta)}{\sin(\theta) + \cos(\theta)}$$

Abbiamo che c'è una derivata verticale ogni volta che il denominatore si annulla cioè ogni volta che $\sin(\theta) + \cos(\theta) = 0$. Visto che per $\theta = 0$ abbiamo il punto di partenzia siamo interessati agli angoli più vicini a 0 $\theta_1 \leq 0 \leq \theta_2$ per cui si verifichi questa condizione. É facile vedere che $\theta_1 = -\pi/4$, $\theta_2 = 3\pi/4$. Vogliamo quindi capire "che coordinate cartesiane ha" questa curva

[1]Graficamente questo vuol dire che ci restringiamo ad un intervallo per cui tracciando rette parallele all'asse delle y incrociamo il grafico esattamente una volta sola.

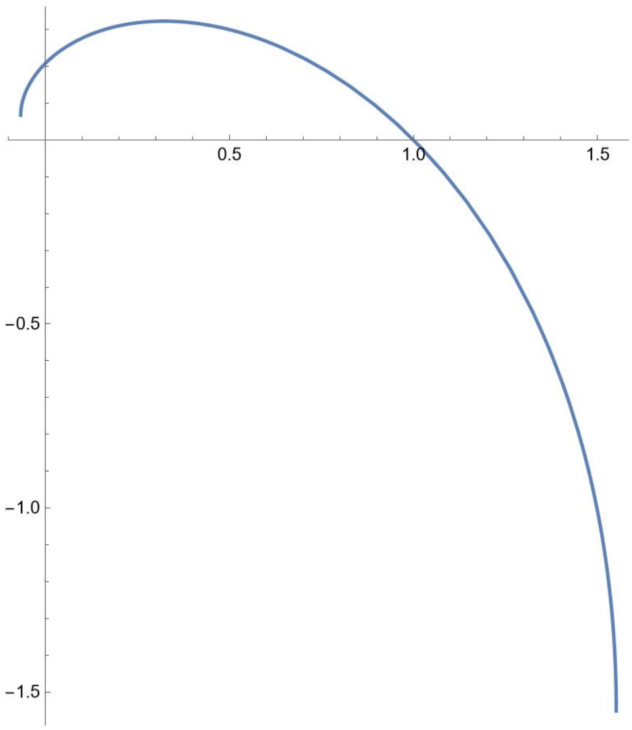

Figura 3: Grafico di $r(\theta) = e^{-\theta}$ per $-\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$.

Con un po' di trigonometria otteniamo che

$$a = -\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \quad b = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

$\square$

7 Esercizi visti il 19 dicembre 2023

Esercizio 40. [1, Esercizio 10.2] Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Seguiamo il procedimento descritto in [2, Sezione 9]. Cerchiamo una soluzione del problema omogeneo associato ovvero

$$y'' + y = 0$$

L'equazione associata è data da

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

che ha dicriminante $\Delta < 0$ e soluzioni $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Quindi la soluzione dell'equazione omogenea è data da

$$y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ora dobbiamo determinare una soluzione particolare: la matrice wronskiana è data da

$$W(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

La condizione che richiediamo per W è che

$$W(x)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\cos(x)}\end{pmatrix}$$

Ovvero abbiamo il sistema

$$\begin{cases}\cos(x)\psi_1+\sin(x)\psi_2=0,\\ -\sin(x)\psi_1+\cos(x)\psi_2=\frac{1}{\cos(x)}\end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo

$$\psi_1=-\frac{\psi_2\sin(x)}{\cos(x)}$$

e sostituendo nella seconda otteniamo

$$\frac{\psi_2\sin^2(x)}{\cos(x)}+\cos(x)\psi_2=\frac{1}{\cos(x)}\Rightarrow\psi_2\left(\frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}+\cos(x)\right)=\frac{1}{\cos(x)}$$

ovvero

$$\psi_2(x)=1$$

e quindi

$$\psi_1(x)=-\tan(x)$$

integrando otteniamo

$$\phi_1(x)=-\int_0^x\tan(t)dt=[\ln|\cos(t)|]_0^x=\ln|\cos(x)|$$

e

$$\phi_2(x)=\int_0^x dt=x$$

da cui la soluzione particolare è data da

$$y_1(x)=x\sin(x)+\ln|\cos(x)|\cos(x)$$

quindi la soluzione generale è data da

$$y(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)+x\sin(x)+\ln|\cos(x)|\cos(x)$$

imponiamo le condizioni iniziali: da $y(0)=0$ ricaviamo

$$0=c_1$$

Ci calcoliamo $y'(x)$ ovvero

$$y'(x)=c_2\cos(x)+\sin(x)+x\cos(x)-\tan(x)\cos(x)-\ln|\cos(x)|\sin(x)$$

e da $y'(0)=0$ ricaviamo

$$0=c_2$$

da cui otteniamo finalmente la soluzione

$$y(x)=\cos(x)\ln|\cos(x)|+x\sin(x)$$

□

Esercizio 41. [1, Esercizio 10.3] Sia A la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare la soluzione generale del sistema lineare di equazioni differenziali $y' = Ay$.

Svolgimento. Sappiamo dalle ultime lezioni che la soluzione è data da

$$y(x) = e^{xA}x_0$$

dove $x_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ è definito come $y(0) = x_0$. Cerchiamo gli autovalori della matrice: ovvero calcoliamo il determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

i due autovalori sono quindi $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Vogliamo scrivere quindi A come

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

dove

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

In tal modo avremo che

$$e^{xA} = Se^{x\Lambda}S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Ci resta da capire chi è la matrice del cambio di base S. Cerchiamo gli autovettori di A: abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iw_1 \\ iw_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} w_2 = iw_1 \\ -w_1 = iw_2 \end{cases}$$

ovvero l'autospazio relativo a $\lambda_1 = i$ è generato da $(1, i)$. Allo stesso modo cerchiamo l'autospazio relativo a $\lambda_2 = -i$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iw_1 \\ -iw_2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} w_2 = -iw_1 \\ -w_1 = -iw_2 \end{cases}$$

ovvero l'autospazio relativo a $\lambda_2 = -i$ è generato da $(i, 1)$. Definiamo quindi

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

La sua inversa è data da

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

In definitiva quindi la soluzione è data da

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

da cui

$$y_1(x) = \frac{1}{2}[e^{ix}(a-ib) + ie^{-ix}(-ia+b)] = \frac{1}{2}[e^{ix}(a-ib) + e^{-ix}(a+ib)]$$
$$y_2(x) = \frac{1}{2}[ie^{ix}(a-ib) + e^{-ix}(-ia+b)] = \frac{1}{2}[e^{ix}(ia+b) + e^{-ix}(-ia+b)]$$

ce le riscriviamo in maniera più comoda

$$y_1(x) = a\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + ib\frac{e^{-ix}-e^{ix}}{2} = a\cos(x) + b\sin(x)$$
$$y_2(x) = ia\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} + b\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = -a\sin(x) + b\cos(x)$$

□

Esercizio 42. [1, Esercizio 11.2] Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + x^2 - 1, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove y è la funzione incognita ed x è la sua variabile.

1. Provare che il problema ha un'unica soluzione locale.
2. Discutere eventuali simmetrie.
3. Studiare qualitativamente la monotonia della soluzione y.
4. Sia $(-b, b) \subseteq \mathbb{R}$, con $0 < b \leq \infty$, l'intervallo di definizione della soluzione massimale. Provare che $b < \infty$ e che $b > \sqrt{3/2}$.

Svolgimento.

1. La funzione $f(x, y) = y^2+x^2-1$ è $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi in particolare è localmente lipschitziana: possiamo usare [2, Teorema 7.5.2] ed affermare che esiste un'unica soluzione locale.

2. Vediamo se y è pari, dispari o nessuna delle due. Definiamo $z(x) = y(-x)$: vediamo che y non è pari: non verifica lo stesso Problema di Cauchy perchè

$$z'(x) = -y'(-x) = -y^2(-x) - (-x)^2 + 1 = -z^2 - x^2 + 1.$$

Tuttavia y è dispari perchè se definiamo $z(x) = -y(-x)$ otteniamo

$$z'(x) = y'(-x) = y(-x)^2 + (-x)^2 - 1 = z(x)^2 + x^2 - 1$$

e $z(0) = -y(0) = 0$. Per l'unicità della soluzione y è dispari.

3. Studiamo la disequazione $f(x, y) > 0$ ovvero

$$y^2 + x^2 - 1 > 0$$

cioè il complementare aperto del disco: $x^2 + y^2 > 1$. Il punto iniziale $(x, y) = (0, y(0)) = (0, 0)$ si trova all'interno del disco. Quindi sappiamo che di certo la soluzione è decrescente in un intorno di $(0, 0)$ (perchè lì $f < 0$). Quando la soluzione incrocia il cerchio unitario abbiamo che f e quindi y' si annulla quindi esiste un certo $\overline{x} \in (0, 1)$ tale che $f'(\overline{x}) = 0$. Da quell'$\overline{x}$ in poi y è crescente. Visto che la funzione è dispari lo stesso succede anche a sinistra di $-\overline{x}$. Quindi quando in $\overline{x}, -\overline{x}$ y esce dal cerchio unitario poi non può più rientrarvi.

4. Dal punto precedente sappiamo che esiste un unico $x_0 \in (1, b)$ tale che $y(x_0) = 0$ (per semplicità ci mettiamo solo a destra dell'asse delle y visto che la funzione è dispari). Sia $\beta = \sqrt{x_0^2 - 1} > 0$. Quindi per $x > x_0$ otteniamo

$$y'(x) = y(x)^2 + x^2 - 1 \geq y(x)^2 + \beta^2$$

ovvero

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2 + \beta^2} \geq 1$$

integrando tra x_0 e b otteniamo

$$\int_{x_0}^{b} \frac{y'(x)}{y(x)^2 + \beta^2} dx \geq \int_{x_0}^{b} dx$$

ovvero

$$\int_{x_0}^{b} \frac{y'(x)}{y(x)^2 + \beta^2} dx \geq b - x_0$$

l'integrale è noto e si ha

$$\frac{1}{\beta} \left[\arctan \left(\frac{y(x)}{\beta} \right) \right]_{x_0}^{b} \geq b - x_0$$

da cui

$$\arctan \left(\frac{y(b)}{\beta} \right) \geq \beta(b - x_0)$$

quindi

$$\frac{\pi}{2} \geq \arctan \left(\frac{y(x)}{\beta} \right) \geq \beta(b - x_0)$$

e di conseguenza

$$b \leq \frac{\pi}{2\beta} + x_0$$

ovvero $b < \infty$. Vediamo che $b > \sqrt{3/2}$. Abbiamo che $y' = y^2 + x^2 - 1 \geq -1$ quindi integrando tra 0 e x per $x \in [0, b)$ otteniamo

$$y(x) \geq -x.$$

Se $y(x) \leq 0$ allora questa disuguaglianza equivale a

$$y(x)^2 \leq x^2.$$

Quindi per ogni $x \geq 0$ tale che $y(x) \leq 0$ si ha, sostituendo nell'equazione differenziale di partenza,

$$y'(x) \leq 2x^2 - 1$$

integrando da 0 a x otteniamo

$$y(x) \leq \frac{2}{3}x^3 - x$$

Ma allora abbiamo

$$0 = y(x_0) \leq \frac{2}{3}x_0^3 - x_0$$

e visto che ci restringiamo al semiasse delle x positivo ci resta che $x_0 > \sqrt{3/2}$. Ma allora possiamo concludere che

$$b > x_0 \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$\square$

Esercizio 43. [1, Esercizio 11.3] Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y^2-x^2+1}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1. Provare che il problema ha un'unica soluzione locale $y \in C^1(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.
2. Provare che la soluzione è una funzione crescente.
3. Sia $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ l'intervallo di esistenza della soluzione massimale. Provare che $b = \infty$.
4. Provare che $y(x) > x$ per ogni $x \in (a, b)$.
5. Provare che
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) - x = 0.$$

Svolgimento. 1. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{y^2 - x^2 + 1}$$

Possiamo definire f in uno dei tre sottoinsiemi tagliati dall'iperbole $y^2 - x^2 - 1 = 0$. Visto che a noi interessa un intorno del punto $(0, 1)$ ci mettiamo nel sottoinsieme "centrale" ovvero in $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 + 1 > 0\}$. Abbiamo che $f \in C^\infty(A)$ quindi come nell'esercizio precedente possiamo usare [2, Teorema 7.5.2] per ottenere esistenza e unicità locale per il Problema di Cauchy.

2. Dal punto precedente sappiamo che $f > 0$ su A quindi $y' > 0$ su A quindi f è una funzione crescente.

3. *Risolviamo prima il punto 4. che useremo per mostrare il punto 3.*

4. Cerchiamo di capire quando $y^2 - x^2 + 1 \leq 1$: se questo accade allora

$$y'(x) = \frac{1}{y^2 - x^2 + 1} \geq 1 \Rightarrow \int_0^x y'(t) \geq \int_0^x dt \Rightarrow y(x) - y(0) \geq x \Rightarrow y(x) \geq x + 1 > x.$$

Ma $y^2 - x^2 + 1 \leq 1$ se e solo se $(y - x)(y + x) \leq 0$ ovvero se siamo nelle zone evidenziate in blu in figura

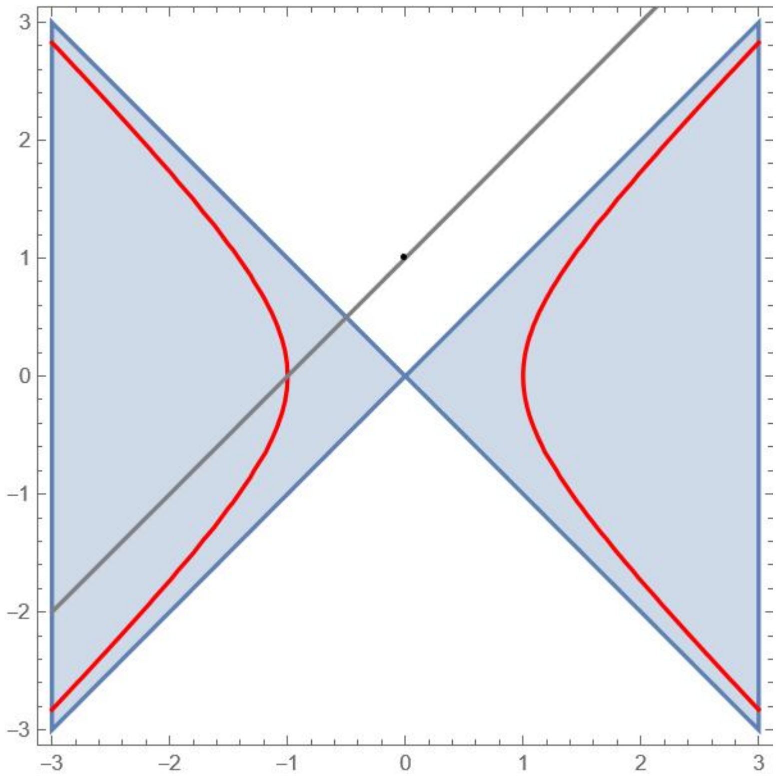

Figura 4: In blu siamo nella zona in cui $y(x) \geq x+1$, in rosso il grafico di $y^2 - x^2 + 1 = 0$ (iperboloide), in grigio la retta $y = x+1$, in nero il punto (di partenza) $(0,1)$. Ricordiamo che nella zona al centro tagliata dall'iperboloide y è crescente.

Dall'immagine segue la conclusione visto che "non possiamo entrare nelle zone blu" visto che altrimenti dovremmo "risaltare" al di sopra della retta grigia.

3. Vogliamo usare [2, Teorema 7.6.3] e mostrare che se $b \neq \infty$ allora non possiamo mai avere $\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \infty$. Se ciò è vero allora possiamo dedurre che $b = \infty$. Come nel punto 4. osserviamo che $y^2 - x^2 + 1 \geq 1$ (ovvero se e soltanto se siamo nell'altra zona tagliata dalle due bisettrici) allora
$$y(x) \leq x+1$$
Ma allora anche alla luce di quanto osservato prima la soluzione che "nasce" in $(0,1)$ deve necessariamente restare tra le rette $y = x+1$ e $y = x$. Nello specifico per ogni $x > 0$ vale $0 < y(x) \leq x+1$. Ma allora se $0 < b \neq \infty$
$$\lim_{x\to b} |y(x)| = \lim_{x\to b} y(x) \leq \lim_{x\to b} x+1 = b+1 < \infty.$$

5. Dai punti precedenti abbiamo che per $x \geq 0$ segue
$$x < y(x) \leq x+1$$
da cui
$$0 < y(x) - x \leq 1$$
Quindi se esiste un limite $L = \lim_{x\to\infty} y(x) - x$ abbiamo che $L \in [0,1]$. Se mostriamo che $y(x) - x$ è decrescente allora abbiamo che certamente L esiste. Per $x > 0$ dai punti precedenti abbiamo che $y'(x) \leq 1$ quindi $\frac{d}{dx}(y(x) - x) = y'(x) - 1 \leq 0$ ovvero $y(x) - x$

è decrescente. Supponiamo ora per assurdo si abbia $L \in (0,1]$. Definiamo per $x \geq 0$ $z(x) = y(x) - x$. Abbiamo che

$$z' = y' - 1 = \frac{1}{y^2 - x^2 + 1} - 1 = \frac{1}{(z+x)^2 - x^2 + 1} - 1 = \frac{1}{z^2 + 2zx + 1} - 1$$

ma se mandiamo $x \to +\infty$ otteniamo (visto che $\lim_{x\to+\infty} z(x) = L > 0$) che

$$\lim_{x\to\infty} z'(x) = -1$$

ma ciò implicherebbe che $\lim_{x\to+\infty} z(x) = -\infty$, il che è assurdo. Necessariamente segue quindi che $L = 0$.

$\square$

8 Esercizi visti il 12 gennaio 2024

Esercizio 44. [1, Esercizio 12.1] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

1. Determinare il più grande aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che f sia un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su A.
2. Stabilire se f è un diffeomorfismo su A.
3. Dare esempi di insiemi aperti $B \subseteq A$ massimali su cui f è un diffeomorfismo.

Svolgimento.

1. Vogliamo usare il teorema di invertibilità locale ([2, Teorema 8.1.3]). Studiamo il determinante dello Jacobiano:

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \det(Jf(x,y)) = 4x^2 + 4y^2.$$

Da cui osserviamo che $\det(Jf(x,y)) = 0$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$ ovvero f è un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. f non è un diffeomorfismo su A perchè f non è globalmente iniettiva su A: ad esempio $f(1,0) = f(-1,0) = (1,0)$.

3. Vediamo quand'è che f è iniettiva. Di certo f non è iniettiva nei punti $(x,y)\&(-x,-y)$ (in altre parole f gode di simmetria centrale rispetto all'origine) quindi esempi di aperti massimali su cui f è un diffeomorfismo sono ad esempio

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \quad B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\},$$

$$B_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad B_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}.$$

Vediamo che f è un diffeomorfismo su B_1 (per gli altri la prova è uguale) e che l'aperto è massimale. L'aperto è massimale poichè se così non fosse allora aggiungeremo almeno un punto per cui il suo simmetrico rispetto all'origine sta già in B_1 e quindi f non sarebbe iniettiva. Ci resta solo da vedere che f è iniettiva su B_1. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $f(x,y) = (\alpha, \beta)$. Vediamo che esiste un unico punto $(x,y) \in B_1$ che realizza questa equazione ovvero che risolve il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

Visto che $x > 0$ possiamo dividere la seconda equazione per $2x$ ottenendo

$$y = \frac{\beta}{2x}$$

sostituendo nella prima otteniamo

$$x^2 - \frac{\beta^2}{4x^2} = \alpha \Rightarrow x^4 - \alpha x^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0$$

che ha per soluzioni

$$x^2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$$

dobbiamo necessariamente scartare la soluzione con il meno (perchè altrimenti avremmo un quadrato negativo) e estraendo la radice otteniamo

$$x = \pm\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}$$

ma visto che siamo in B_1 dobbiamo escludere la soluzione con il meno ottenendo un unico valore per x e di conseguenza l'unico punto

$$(x, y) = \left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}, \frac{\beta}{2\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}}\right).$$

□

Esercizio 45. [1, Esercizio 12.2] Siano $A = (x, y \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y) - e^{x(1+y)} + 1.$$

1. Provare che l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente intorno a $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.
2. Esprimere φ' in funzione di φ e calcolare poi $\varphi'(0)$.
3. Calcolare $\varphi''(0)$.

Svolgimento. 1. Vogliamo usare il teorema del Dini ([2, Teorema 8.2.1]): verifichiamo le ipotesi: $f \in C^\infty(A)$, $(0, 0) \in A$ e $f(0, 0) = 0$; calcoliamoci le jacobiane (cioè le derivate) parziali: abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x + y} - e^{x(1+y)}(1 + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + x + y} - e^{x(1+y)}x$$

Da cui osserviamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$$

Quindi sappiamo per il teorema del Dini che esiste un $\delta > 0$ e una funzione $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ che rispetta la richiesta del punto 1..

2. Sempre per il teorema del Dini abbiamo che φ rispetta la seguente relazione

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))$$

ovvero

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{1}{1+x+\varphi(x)} - e^{x(1+\varphi(x))}x\right)^{-1}\left(\frac{1}{1+x+\varphi(x)} - e^{x(1+\varphi(x))}(1+\varphi(x))\right)$$

cioè

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{1-e^{x(1+\varphi(x))}x(1+x+\varphi(x))}{1+x+\varphi(x)}\right)^{-1}\left(\frac{1-e^{x(1+\varphi(x))}(1+\varphi(x))(1+x+\varphi(x))}{1+x+\varphi(x)}\right)$$

i.e.

$$\varphi'(x) = \frac{e^{x(1+\varphi(x))}(1+\varphi(x))(1+x+\varphi(x))-1}{1-e^{x(1+\varphi(x))}x(1+x+\varphi(x))}$$

da cui

$$\varphi'(0) = -1+(1+\varphi(0))^2$$

ma $\varphi(0)=0$ (visto che $f(0,0)=0$) da cui $\varphi'(0)=0$.

3. Calcoliamoci la derivata di $\varphi'(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$. Abbiamo

$$\varphi''(x) = \frac{a'(x)b(x)-a(x)b'(x)}{(b(x))^2}$$

ora

$$\begin{aligned} a'(x) =& e^{x(1+\varphi(x))}(1+\varphi(x)+x\varphi'(x))(1+\varphi(x))(1+x+\varphi(x))+ \\ &+ e^{x(1+\varphi(x))}\varphi'(x)(1+x+\varphi(x))+ \\ &+ e^{x(1+\varphi(x))}(1+\varphi(x))(1+\varphi'(x)) \end{aligned}$$

Abbiamo che $a(0)=0, b(0)=1, a'(0)=2$ (visto che $a(0)=0$ è inutile che ci calcoliamo $b'(0)$) da cui

$$\varphi''(0) = \frac{a'(0)b(0)-a(0)b'(0)}{(b(0))^2} = 2$$

□

Esercizio 46. [5, Esercizio 2 dell'esame del 24/08/2020] Sia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \left(2x+\frac{1}{1+y^2}, 2y+\frac{1}{1+x^2}\right).$$

1. Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

2. Stabilire se F è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. 1. Osserviamo che $F\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ e studiamo il determinante dello Jacobiano: abbiamo

$$\det(JF(x,y)) = \det\begin{pmatrix} 2 & -\frac{2y}{(1+y^2)^2} \\ -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & 2 \end{pmatrix} = 4 - \frac{4xy}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$$

Ora osserviamo che
$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)}\underbrace{\frac{1}{(1+x^2)}}_{\leq 1}.$$
Studiamo ora la funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Abbiamo che va a 0 per $x \to \pm\infty$. La sua derivata è data da $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ quindi f è crescente tra -1 e 1 e decrescente altrove. Quindi ha un massimo in $f(1) = 1/2$. Segue dunque che
$$\frac{x}{(1+x^2)^2} \leq \frac{x}{(1+x^2)} \leq \frac{1}{2}.$$
Allo stesso modo abbiamo che
$$\frac{y}{(1+y^2)^2} \leq \frac{1}{2}$$
e quindi
$$\det(JF(x,y)) = 4 - \frac{4xy}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \geq 4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 > 0$$
ovvero F è un diffeomorfismo locale su $\mathbb{R}^2$.

2. Fissiamo $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ e cerchiamo di risolvere l'equazione $F(x,y) = (\alpha,\beta)$. Se troviamo almeno una soluzione allora F è suriettiva su $\mathbb{R}^2$, se poi ne troviamo esattamente una allora F è iniettiva su $\mathbb{R}^2$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema
$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{1+y^2} = \alpha \\ 2y + \frac{1}{1+x^2} = \beta \end{cases}$$
mettiamo in ordine e otteniamo
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2(1+y^2)} + \frac{\alpha}{2} \\ y = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{\beta}{2}. \end{cases}$$
Consideriamo ora l'applicazione
$$G(x,y) = \left(-\frac{1}{2(1+y^2)} + \frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{\beta}{2}\right)$$
Se mostriamo che G è una contrazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ allora il sistema ammette esattamente una soluzione (ovvero il punto fisso di G) e quindi F è sia iniettiva che suriettiva su $\mathbb{R}^2$. Siano $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$: abbiamo
$$|G(x_1,y_1) - G(x_2,y_2)| = \left|\left(-\frac{1}{2(1+y_1^2)} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2(1+y_2^2)} - \frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2(1+x_1^2)} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2(1+x_2^2)} - \frac{\beta}{2}\right)\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{1+y_2^2} - \frac{1}{1+y_1^2}, \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2}\right)\right|$$
ora osserviamo che
$$\left|\frac{1}{1+y_2^2} - \frac{1}{1+y_1^2}\right| = \left|\frac{1+y_1^2-1-y_2^2}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} = \frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}\right| =$$

$$= |y_1 - y_2| \left| \frac{y_1}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} + \frac{y_2}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} \right| \leq |y_1 - y_2| \left(\underbrace{\frac{|y_1|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}}_{\leq 1/2} + \underbrace{\frac{|y_2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}}_{\leq 1/2} \right)$$

e in definitiva

$$\left| \frac{1}{1+y_2^2} - \frac{1}{1+y_1^2} \right| \leq |y_1 - y_2|$$

allo stesso modo otteniamo

$$\left| \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2} \right| \leq |x_1 - x_2|.$$

Quindi

$$|G(x_1, y_1) - G(x_2, y_2)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} = \frac{1}{2}|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|$$

ovvero G è una contrazione su $\mathbb{R}^2$ ed F è iniettiva e suriettiva su $\mathbb{R}^2$.

□

Esercizio 47. [5, Esercizio 2 dell'esame del 03/09/2020] Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}\sin(y), y + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) \right).$$

1. Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.
2. Stabilire se F è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. 1. Osserviamo che $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e studiamo il determinante dello Jacobiano: abbiamo

$$\det(JF(x, y)) = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos(y) \\ \frac{x}{1+x^2} & 1 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{2}\cos(y)\frac{x}{1+x^2}$$

Come nell'esercizio di prima notiamo che $\frac{x}{1+x^2} \leq 1/2$. Inoltre $\cos(y) \leq 1$ quindi abbiamo che

$$\det(JF(x, y)) = \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos(y) \\ \frac{x}{1+x^2} & 1 \end{pmatrix} \geq 1 - \frac{1}{2}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0$$

ovvero F è un diffemorfismo locale su $\mathbb{R}^2$.

2. Fissiamo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ e cerchiamo di risolvere l'equazione $F(x, y) = (\alpha, \beta)$. Se troviamo almeno una soluzione allora F è suriettiva su $\mathbb{R}^2$, se poi ne troviamo esattamente una allora F è iniettiva su $\mathbb{R}^2$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}\sin(y) = \alpha \\ y + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = \beta \end{cases}$$

mettiamo in ordine e otteniamo

$$\begin{cases} x = \alpha - \frac{1}{2}\sin(y) \\ y = \beta - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2). \end{cases}$$

Consideriamo ora l'applicazione

$$G(x,y) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(y), \beta - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)$$

Se mostriamo che G è una contrazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ allora il sistema ammette esattamente una soluzione (ovvero il punto fisso di G) e quindi F è sia iniettiva che suriettiva su $\mathbb{R}^2$. Siano $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$: abbiamo

$$|G(x_1,y_1) - G(x_2,y_2)| = \left|\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(y_1) - \alpha + \frac{1}{2}\sin(y_2), \beta - \frac{1}{2}\ln(1+x_1^2) - \beta + \frac{1}{2}\ln(1+x_2^2)\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\sin(y_2) - \sin(y_1), \ln(1+x_2^2) - \ln(1+x_1^2)\right)\right|.$$

Usiamo ora il teorema del valor medio di Lagrange: per la prima componente abbiamo che esiste un y^* compreso tra y_1 e y_2 tale che

$$|\sin(y_2) - \sin(y_1)| = |\cos(y^*)||y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2|$$

allo stesso modo per la seconda componente esiste un x^* compreso tra x_1 e x_2 tale che

$$|\ln(1+x_2^2) - \ln(1+x_1^2)| = \left|\frac{2x^*}{1+(x^*)^2}\right||x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

Quindi

$$|G(x_1,y_1) - G(x_2,y_2)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} = \frac{1}{2}|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)|$$

ovvero G è una contrazione su $\mathbb{R}^2$ ed F è iniettiva e suriettiva su $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Esercizio 48. [4, Esercizio 2 dell'esame del 18/02/2013] Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua fissata. Provare che l'equazione funzionale

$$(1+x^2)\varphi(x) + x\sin(\varphi(x)) = g(x)$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Svolgimento. Fissiamo $M > 0$ e consideriamo $X = C([-M, M])$ con la norma infinita. Definiamo $T : X \to X$ come

$$T\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}(g(x) - x\sin(\varphi(x))), \quad x \in [-M, M].$$

Mostriamo che T è una contrazione su X. Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in X$. Sfruttando i conti degli esercizi precedenti abbiamo che

$$|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| = \frac{1}{1+x^2}|x\sin(\varphi_2(x)) - x\sin(\varphi_1(x))| =$$

$$= \frac{|x|}{1+x^2}|\sin(\varphi_2(x)) - \sin(\varphi_1(x))| \leq \frac{1}{2}|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

ovvero abbiamo

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

Cioè T è una contrazione e quindi ammette un unico punto fisso $\varphi \in X$ tale che $T\varphi = \varphi$ e quindi risolve l'equazione funzionale su $X = C([-M, M])$. Ma questa dimostrazione non dipende dalla scelta di M quindi l'equazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo ora la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = (1 + x^2)y + x\sin(y) - g(x)$$

se $g \in C^1(\mathbb{R})$ allora necessariamente $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamoci le sue derivate parziali: abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + \sin(y) - g'(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + x^2 + x\cos(y)$$

osserviamo ora che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + x^2 + x\cos(y) = (1 + x^2)\left(1 + \frac{x}{1 + x^2}\cos(y)\right) \geq 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$$

quindi possiamo usare il teorema del Dini ed esiste una funzione $x \to \varphi(x)$ con $\varphi \in C^1$ tale che $f(x, \varphi(x)) = 0$ ovvero φ risolve l'equazione funzionale. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf`

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf`

[3] Roberto Monti, *Soluzioni manoscritte*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628809/mod_resource/content/1/Soluzioni_Esercizi.pdf`

[4] Roberto Monti, *Testi d'esame del 2013 con soluzioni*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628783/mod_resource/content/1/Esami2013.pdf`

[5] Roberto Monti, *Testi d'esame del 2020 con soluzioni*, `https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628784/mod_resource/content/1/Esami2020.pdf`