Esercizi visti il 12 gennaio

A cura di Marco Di Marco

Esercizio 1. [1, Esercizio 12.1] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

1. Determinare il più grande aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che f sia un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su A.

2. Stabilire se f è un diffeomorfismo su A.

3. Dare esempi di insiemi aperti $B \subseteq A$ massimali su cui f è un diffeomorfismo.

Svolgimento. 1. Vogliamo usare il teorema di invertibilità locale ([2, Teorema 8.1.3]). Studiamo il determinante dello Jacobiano:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}, \quad \det(Jf(x, y)) = 4x^2 + 4y^2.$$

Da cui osserviamo che $\det(Jf(x, y)) = 0$ se e solo se $(x, y) = (0, 0)$ ovvero f è un diffeomorfismo locale di classe C^∞ su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. f non è un diffeomorfismo su A perchè f non è globalmente iniettiva su A: ad esempio $f(1, 0) = f(-1, 0) = (1, 0)$.

3. Vediamo quand'è che f è iniettiva. Di certo f non è iniettiva nei punti $(x, y)\&(-x, -y)$ (in altre parole f gode di simmetria centrale rispetto all'origine) quindi esempi di aperti massimali su cui f è un diffeomorfismo sono ad esempio

$$B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}, \quad B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\},$$

$$B_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \quad B_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}.$$

Vediamo che f è un diffeomorfismo su B_1 (per gli altri la prova è uguale) e che l'aperto è massimale. L'aperto è massimale poichè se così non fosse allora aggiungeremo almeno un punto per cui il suo simmetrico rispetto all'origine sta già in B_1 e quindi f non sarebbe iniettiva. Ci resta solo da vedere che f è iniettiva su B_1. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $f(x, y) = (\alpha, \beta)$. Vediamo che esiste un unico punto $(x, y) \in B_1$ che realizza questa equazione ovvero che risolve il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

Visto che $x > 0$ possiamo dividere la seconda equazione per $2x$ ottenendo

$$y = \frac{\beta}{2x}$$

sostituendo nella prima otteniamo

$$x^2 - \frac{\beta^2}{4x^2} = \alpha \Rightarrow x^4 - \alpha x^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0$$

che ha per soluzioni

$$x^2 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$$

dobbiamo necessariamente scartare la soluzione con il meno (perchè altrimenti avremmo un quadrato negativo) e estraendo la radice otteniamo

$$x = \pm\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}$$

ma visto che siamo in B_1 dobbiamo escludere la soluzione con il meno ottenendo un unico valore per x e di conseguenza l'unico punto

$$(x, y) = \left(\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}, \frac{\beta}{2\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}}\right).$$

$\square$

Esercizio 2. [1, Esercizio 12.2] Siano $A = (x, y \in \mathbb{R}^2 : 1 + x + y > 0\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y) - e^{x(1+y)} + 1.$$

1. Provare che l'equazione $f = 0$ definisce implicitamente intorno a $0 \in \mathbb{R}^2$ una funzione φ definita in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per qualche $\delta > 0$.
2. Esprimere φ' in funzione di φ e calcolare poi $\varphi'(0)$.
3. Calcolare $\varphi''(0)$.

Svolgimento. 1. Vogliamo usare il teorema del Dini ([2, Teorema 8.2.1]): verifichiamo le ipotesi: $f \in C^\infty(A)$, $(0, 0) \in A$ e $f(0, 0) = 0$; calcoliamoci le jacobiane (cioè le derivate) parziali: abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x + y} - e^{x(1+y)}(1 + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + x + y} - e^{x(1+y)}x$$

Da cui osserviamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$$

Quindi sappiamo per il teorema del Dini che esiste un $\delta > 0$ e una funzione $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ che rispetta la richiesta del punto 1..

2. Sempre per il teorema del Dini abbiamo che φ rispetta la seguente relazione

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))$$

ovvero

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{1}{1 + x + \varphi(x)} - e^{x(1+\varphi(x))}x\right)^{-1} \left(\frac{1}{1 + x + \varphi(x)} - e^{x(1+\varphi(x))}(1 + \varphi(x))\right)$$

cioè

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{1 - e^{x(1+\varphi(x))}x(1 + x + \varphi(x))}{1 + x + \varphi(x)}\right)^{-1}\left(\frac{1 - e^{x(1+\varphi(x))}(1 + \varphi(x))(1 + x + \varphi(x))}{1 + x + \varphi(x)}\right)$$

i.e.

$$\varphi'(x) = \frac{e^{x(1+\varphi(x))}(1 + \varphi(x))(1 + x + \varphi(x)) - 1}{1 - e^{x(1+\varphi(x))}x(1 + x + \varphi(x))}$$

da cui

$$\varphi'(0) = -1 + (1 + \varphi(0))^2$$

ma $\varphi(0) = 0$ (visto che $f(0, 0) = 0$) da cui $\varphi'(0) = 0$.

3. Calcoliamoci la derivata di $\varphi'(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$. Abbiamo

$$\varphi''(x) = \frac{a'(x)b(x) - a(x)b'(x)}{(b(x))^2}$$

ora

$$\begin{aligned} a'(x) =& e^{x(1+\varphi(x))}(1 + \varphi(x) + x\varphi'(x))(1 + \varphi(x))(1 + x + \varphi(x))+ \\ &+ e^{x(1+\varphi(x))}\varphi'(x)(1 + x + \varphi(x))+ \\ &+ e^{x(1+\varphi(x))}(1 + \varphi(x))(1 + \varphi'(x)) \end{aligned}$$

Abbiamo che $a(0) = 0, b(0) = 1, a'(0) = 2$ (visto che $a(0) = 0$ è inutile che ci calcoliamo $b'(0)$) da cui

$$\varphi''(0) = \frac{a'(0)b(0) - a(0)b'(0)}{(b(0))^2} = 2$$

□

Esercizio 3. [4, Esercizio 2 dell'esame del 24/08/2020] Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x, y) = \left(2x + \frac{1}{1 + y^2}, 2y + \frac{1}{1 + x^2}\right).$$

1. Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.

2. Stabilire se F è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. 1. Osserviamo che $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e studiamo il determinante dello Jacobiano: abbiamo

$$\det(JF(x, y)) = \det\begin{pmatrix} 2 & -\frac{2y}{(1+y^2)^2} \\ -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & 2 \end{pmatrix} = 4 - \frac{4xy}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2}$$

Ora osserviamo che

$$\frac{x}{(1 + x^2)^2} = \frac{x}{(1 + x^2)}\underbrace{\frac{1}{(1 + x^2)}}_{\leq 1}.$$

Studiamo ora la funzione $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Abbiamo che va a 0 per $x \to \pm\infty$. La sua derivata è data da $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ quindi f è crescente tra -1 e 1 e decrescente altrove. Quindi ha un massimo in $f(1) = 1/2$. Segue dunque che

$$\frac{x}{(1 + x^2)^2} \leq \frac{x}{(1 + x^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Allo stesso modo abbiamo che

$$\frac{y}{(1+y^2)^2} \leq \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\det(JF(x,y)) = 4 - \frac{4xy}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} \geq 4 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 > 0$$

ovvero F è un diffeomorfismo locale su $\mathbb{R}^2$.

2. Fissiamo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ e cerchiamo di risolvere l'equazione $F(x,y) = (\alpha, \beta)$. Se troviamo almeno una soluzione allora F è suriettiva su $\mathbb{R}^2$, se poi ne troviamo esattamente una allora F è iniettiva su $\mathbb{R}^2$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{1+y^2} = \alpha \\ 2y + \frac{1}{1+x^2} = \beta \end{cases}$$

mettiamo in ordine e otteniamo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2(1+y^2)} + \frac{\alpha}{2} \\ y = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{\beta}{2}. \end{cases}$$

Consideriamo ora l'applicazione

$$G(x,y) = \left(-\frac{1}{2(1+y^2)} + \frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{\beta}{2}\right)$$

Se mostriamo che G è una contrazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ allora il sistema ammette esattamente una soluzione (ovvero il punto fisso di G) e quindi F è sia iniettiva che suriettiva su $\mathbb{R}^2$. Siano $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$: abbiamo

$$|G(x_1,y_1) - G(x_2,y_2)| = \left|\left(-\frac{1}{2(1+y_1^2)} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2(1+y_2^2)} - \frac{\alpha}{2}, -\frac{1}{2(1+x_1^2)} + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2(1+x_2^2)} - \frac{\beta}{2}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{1}{1+y_2^2} - \frac{1}{1+y_1^2}, \frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2}\right)\right|$$

ora osserviamo che

$$\left|\frac{1}{1+y_2^2} - \frac{1}{1+y_1^2}\right| = \left|\frac{1+y_1^2-1-y_2^2}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} = \frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}\right| =$$

$$= |y_1 - y_2|\left|\frac{y_1}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} + \frac{y_2}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}\right| \leq |y_1 - y_2|\left(\underbrace{\frac{|y_1|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}}_{\leq 1/2} + \underbrace{\frac{|y_2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}}_{\leq 1/2}\right)$$

e in definitiva

$$\left|\frac{1}{1+y_2^2} - \frac{1}{1+y_1^2}\right| \leq |y_1 - y_2|$$

allo stesso modo otteniamo

$$\left|\frac{1}{1+x_2^2} - \frac{1}{1+x_1^2}\right| \leq |x_1 - x_2|.$$

Quindi

$$|G(x_1,y_1)-G(x_2,y_2)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2} = \frac{1}{2}|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)|$$

ovvero G è una contrazione su $\mathbb{R}^2$ ed F è iniettiva e suriettiva su $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Esercizio 4. [4, Esercizio 2 dell'esame del 03/09/2020] Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione

$$F(x,y) = \left(x+\frac{1}{2}\sin(y), y+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right).$$

1. Stabilire se F è un diffeomorfismo locale.
2. Stabilire se F è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

Svolgimento. 1. Osserviamo che $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ e studiamo il determinante dello Jacobiano: abbiamo

$$\det(JF(x,y)) = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos(y) \\ \frac{x}{1+x^2} & 1 \end{pmatrix} = 1-\frac{1}{2}\cos(y)\frac{x}{1+x^2}$$

Come nell'esercizio di prima notiamo che $\frac{x}{1+x^2} \leq 1/2$. Inoltre $\cos(y) \leq 1$ quindi abbiamo che

$$\det(JF(x,y)) = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\cos(y) \\ \frac{x}{1+x^2} & 1 \end{pmatrix} \geq 1-\frac{1}{2}(-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0$$

ovvero F è un diffemorfismo locale su $\mathbb{R}^2$.

2. Fissiamo $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ e cerchiamo di risolvere l'equazione $F(x,y) = (\alpha,\beta)$. Se troviamo almeno una soluzione allora F è suriettiva su $\mathbb{R}^2$, se poi ne troviamo esattamente una allora F è iniettiva su $\mathbb{R}^2$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}\sin(y) = \alpha \\ y+\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \beta \end{cases}$$

mettiamo in ordine e otteniamo

$$\begin{cases} x = \alpha-\frac{1}{2}\sin(y) \\ y = \beta-\frac{1}{2}\ln(1+x^2). \end{cases}$$

Consideriamo ora l'applicazione

$$G(x,y) = \left(\alpha-\frac{1}{2}\sin(y), \beta-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)$$

Se mostriamo che G è una contrazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ allora il sistema ammette esattamente una soluzione (ovvero il punto fisso di G) e quindi F è sia iniettiva che suriettiva su $\mathbb{R}^2$. Siano $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$: abbiamo

$$|G(x_1,y_1)-G(x_2,y_2)| = \left|\left(\alpha-\frac{1}{2}\sin(y_1)-\alpha+\frac{1}{2}\sin(y_2), \beta-\frac{1}{2}\ln(1+x_1^2)-\beta+\frac{1}{2}\ln(1+x_2^2)\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(\sin(y_2)-\sin(y_1), \ln(1+x_2^2)-\ln(1+x_1^2)\right)\right|.$$

Usiamo ora il teorema del valor medio di Lagrange: per la prima componente abbiamo che esiste un y^* compreso tra y_1 e y_2 tale che

$$|\sin(y_2) - \sin(y_1)| = |\cos(y^*)||y_1 - y_2| \leq |y_1 - y_2|$$

allo stesso modo per la seconda componente esiste un x^* compreso tra x_1 e x_2 tale che

$$|\ln(1 + x_2^2) - \ln(1 + x_1^2)| = \left|\frac{2x^*}{1 + (x^*)^2}\right| |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

Quindi

$$|G(x_1, y_1) - G(x_2, y_2)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} = \frac{1}{2}|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|$$

ovvero G è una contrazione su $\mathbb{R}^2$ ed F è iniettiva e suriettiva su $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Esercizio 5. [3, Esercizio 2 dell'esame del 18/02/2013] Sia $g \in C(\mathbb{R})$ una funzione continua fissata. Provare che l'equazione funzionale

$$(1 + x^2)\varphi(x) + x\sin(\varphi(x)) = g(x)$$

ha un'unica soluzione continua $\varphi \in C(\mathbb{R})$. Assumendo che $g \in C^1(\mathbb{R})$, provare che $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$.

Svolgimento. Fissiamo $M > 0$ e consideriamo $X = C([-M, M])$ con la norma infinita. Definiamo $T : X \to X$ come

$$T\varphi(x) = \frac{1}{1 + x^2}(g(x) - x\sin(\varphi(x))), \quad x \in [-M, M].$$

Mostriamo che T è una contrazione su X. Siano $\varphi_1, \varphi_2 \in X$. Sfruttando i conti degli esercizi precedenti abbiamo che

$$|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| = \frac{1}{1 + x^2}|x\sin(\varphi_2(x)) - x\sin(\varphi_1(x))| =$$

$$= \frac{|x|}{1 + x^2}|\sin(\varphi_2(x)) - \sin(\varphi_1(x))| \leq \frac{1}{2}|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$$

ovvero abbiamo

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty.$$

Cioè T è una contrazione e quindi ammette un unico punto fisso $\varphi \in X$ tale che $T\varphi = \varphi$ e quindi risolve l'equazione funzionale su $X = C([-M, M])$. Ma questa dimostrazione non dipende dalla scelta di M quindi l'equazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo ora la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = (1 + x^2)y + x\sin(y) - g(x)$$

se $g \in C^1(\mathbb{R})$ allora necessariamente $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamoci le sue derivate parziali: abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + \sin(y) - g'(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + x^2 + x\cos(y)$$

osserviamo ora che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 + x^2 + x\cos(y) = (1 + x^2)\left(1 + \frac{x}{1 + x^2}\cos(y)\right) \geq 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$$

quindi possiamo usare il teorema del Dini ed esiste una funzione $x \to \varphi(x)$ con $\varphi \in C^1$ tale che $f(x, \varphi(x)) = 0$ ovvero φ risolve l'equazione funzionale. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] Roberto Monti, *Quaderno degli esercizi settimanali, versione del 25 settembre 2023*, https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628781/mod_resource/content/1/ANALISI_2_2023-24_Quaderno_Esercizi.pdf

[2] Roberto Monti, Davide Vittone, *Appunti del corso, versione del 25 settembre 2023*, https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628780/mod_resource/content/2/Analisi2A_2023.pdf

[3] Roberto Monti, *Testi d'esame del 2013 con soluzioni*, https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628783/mod_resource/content/1/Esami2013.pdf

[4] Roberto Monti, *Testi d'esame del 2020 con soluzioni*, https://stem.elearning.unipd.it/pluginfile.php/628784/mod_resource/content/1/Esami2020.pdf