Lezione 19 (10 gennaio 2024)

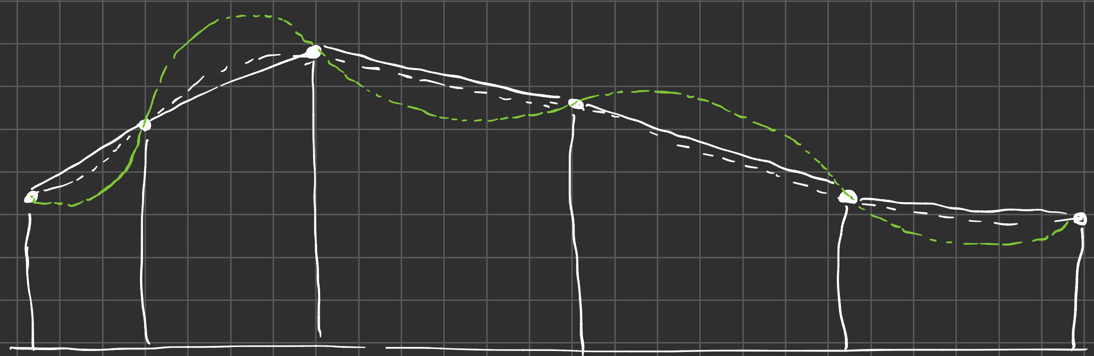
QUADRATURA NUMERICA

Con il termine di quadratura si si riferisce al calcolo approssimato di integrali (definiti)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Perchè?

- è difficile trovare una primitiva
- f è nota solo su alcuni punti



- f è valutabile su ogni punto x numericamente (non conosciamo una espressione analitica)

In tutti questi casi si preferisce approssimare l'integrale con una formula di QUADRATURA

NB : il termine "quadratura" ci ricorda la quadratura del cerchio.

Nello specifico

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) := I_n(f)$$

$x_i \in [a,b]$ detti NODI DI QUADRATURA

$w_i \in \mathbb{R}$ detti PESI DI QUADRATURA

$I_n(f)$ è la nostra formula di quadratura.

Osservazione 1

A volte invece che calcolare $\int_a^b f(x)dx$

si calcola

$$\int_a^b f(x) \underbrace{\omega(x)\,dx}_{\text{misura positiva}}$$

$\omega(x)$ è misura

nonostante $\omega(\cdot)$ è associata alla quadratura "gaussiana" legata all'uso di nodi speciali (zeri dei polinomi ortogonali rispetto ad $[a,b]$ e ad ω)

Osservazione 2

$$I : \mathcal{C}^0[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$ è funzionale lineare

$$I_n : \mathcal{C}^0[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) = \langle \bar{w}, \bar{f} \rangle$$

$$\bar{w} = (w_0, \dots, w_n)^T \qquad \bar{f} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

FORMULE DI TIPO INTERPOLATORIO

Dati $x_0, \dots, x_n$ distinti in $[a,b]$ sia

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

è il polinomio d'interpolazione di grado n in forma di Lagrange

e sia $E_n(f)$ il corrispondente errore d'interpolazione $\quad f(x) = p_n(x) + E_n(f)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)\,dx + \int_a^b E_n(f)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b l_i(x)\,dx \right)}_{w_i} f(x_i) + \underbrace{\int_a^b E_n(f)\,dx}_{R_n(f)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i) + \underbrace{R_n(f)}_{\text{errore di quadratura}}$$

<u>NB</u> se avessi considerato

$$\int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i\, f(x_i) + \tilde{R}_n(f)$$

con $\tilde{w}_i = \int_a^b l_i(x)\,\omega(x)\,dx$

$$\tilde{R}_n(f) = \int_a^b E_n(f)\,\omega(x)\,dx$$

GRADO DI ESATTEZZA di UNA FORMULA DI TIPO INTERPOLATORIO

<u>Def</u> Una formula di quadratura di tipo interpolatorio si dice ESATTA con grado di esattezza n se integra esattamente i polinomi di grado $\leq n$.

Dalla definizione se $f \in \mathbb{P}_n$ allora

$$E_n(f) = 0 \implies R_n(f) = 0$$

Non solo se $f = 1, x, \dots, x^n$ e la formula di quadratura è esatta di grado n allora possiamo scrivere

$$(*) \begin{cases} \int_a^b x^0 \, dx = w_0 \cdot 1 + w_1 \cdot 1 + \dots + w_n \cdot 1 \\ \int_a^b x \, dx = w_0 x_0 + w_1 x_1 + \dots + w_n x_n \\ \vdots \\ \int_a^b x^n \, dx = w_0 x_0^n + w_1 x_1^n + \dots + w_n x_n^n \end{cases}$$

ciò equivale al sistema lineare

$$(1) \quad \boxed{V \, \overline{w} = \overline{m}} \qquad \overline{m} = \begin{pmatrix} \int_a^b x^0 \, dx \\ \int_a^b x \, dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^n \, dx \end{pmatrix}$$

$$m_i = \int_a^b x^i \, dx$$

momenti

momento i-esimo

Il sistema (1), ha matrice di Vandermonde che sappiamo essere invertibile perché

$$x_i \neq x_j \quad i \neq j \quad \left(\det V = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \right)$$

Quindi il sistema lineare (1) mi consente di determinare i pesi di quadratura, $w_0, \ldots, w_n$.

Esempio

Data la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq a_1 f(-1) + a_2 f(0) + a_3 f(1/2)$$

determinare i coefficienti a_1, a_2, a_3 cosicché sia esatta sui polinomi di grado 2.

Svolgimento

Dovrà essere esatta sui monomi $1, x, x^2$

$$2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot dx = a_1 + a_2 + a_3$$

$$0 = \int_{-1}^{1} x\, dx = a_1(-1) + a_2 \cdot 0 + a_3 (1/2)$$

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2 dx = a_1 (-1)^2 + a_2 (0)^2 + a_3 (1/2)^2$$

Il sistema dei momenti è

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2 \\ -a_1 + \frac{a_3}{2} = 0 \\ a_1 + \frac{a_3}{4} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad a_1 = \frac{4}{9}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{8}{9}$$

$\sum_{i=1}^{3} a_i = 2$ è l'ampiezza dell'intervallo $[-1,1]$

Pertanto la formula di quadratura cercata

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \underbrace{\frac{4}{9} f(-1) + \frac{2}{3} f(0) + \frac{8}{9} f(1/2)}$$

La formula integra $f(x) = x^3$?

$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$ la formula invece mi da

$$\frac{4}{9}(-1)^3 + \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{8}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$-\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3} \neq 0$$

$\Longrightarrow$ Pertanto con la formula di quadratura posso integrare i polinomi fino al grado 2.

Questo è un fatto generale: se una formula è esatta fino al grado n, ovvero $R_n(f) = 0$, si avrà che

$$R_{n+1}(f) \neq 0$$

CONVERGENZA

Teorema (di Polya - Steklov)

Detto $R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\forall f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ ci sia convergenza, ovvero

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(f) = 0$$

è che

(1) $\exists\, C \in \mathbb{R}$ (indipendente da n)

t.c. $\sum_{i=0}^{n} |w_i| \leq C$

(2) $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \to +\infty} R_n(x^k) = 0$

cioè è esatta sui polinomi di grado k

Dim

(Sufficienza) Per Weierstrass $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{P}_n$ t.c.

$$\| f - p \|_\infty \leq \varepsilon$$

Allora

$$|R_n(f-p)| = \left| \int_a^b \underbrace{(f(x) - p(x))}_{\|f-p\|_\infty \leq \varepsilon} dx - \sum_{i=0}^n w_i \underbrace{(f-p)(x_i)}_{\|f-p\| \leq \varepsilon} \right|$$

usando le maggiorazioni

$$\leq \varepsilon \left(\int_a^b dx + \sum_{i=0}^n |w_i| \right)$$

vale l'assunzione (1)

$$\leq \varepsilon \left(\int_a^b dx + C \right)$$

allora, per la linearità dell'integrale,

$$|R_n(f)| \leq \varepsilon \left(\int_a^b dx + C \right) + \underbrace{|R_n(p)|}_{=0}$$

passando al limite si conclude che

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(f) = 0$$

(Necessità) La (2) è verificata. D'altra parte

$$\| R_n \|_\infty = \sup_{f \in \mathcal{C}^0_{[a,b]}} \frac{|R_n(f)|}{\|f\|_\infty} = \int_a^b dx + \sum_{i=0}^n |w_i|$$

dal fatto che $\lim_{n \to +\infty} R_n(f) = 0$

e applicando un teorema di analisi funzionale di Banach - Steinhaus

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

se applicato il teorema di B-S con $x \equiv 1$

allora $\sup \|R_n\|$ è limitato e quindi vale la (1)

#

- Il problema è che per determinare l'esattezza si usa la matrice di Vandermonde che è mal condizionata. Quindi nel risolvere il sistema dei momenti potrà accadere che non sia soddisfatta la proprietà di limitatezza della somma dei pesi di quadratura. Con la conseguenza che al crescere di n le formule <u>non convergono</u>.

- Come ultima osservazione se $f \in C^k[a,b]$ si ha anche che

$$|R_n f| \leq \frac{A}{n^k} \qquad A \in \mathbb{R}_+$$

$\Rightarrow$ più f è regolare e più veloce solo la convergenza

FORMULE DI NEWTON - CÔTES

Caratteristica delle formule di quadratura di tipo interpolatorio di Newton-Côtes è la scelta dei punti di quadratura che sono EQUISPAZIATI

- formule chiuse $\quad x_0 = a \quad x_n = b$

$$x_i = a + ih \qquad h = \frac{b-a}{n}$$
$$i = 1, \dots, n-1$$

- formule aperte

$$x_0 = a + h \qquad x_n = b - h$$

$$x_i = x_0 + ih \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$h = \frac{b-a}{n+2}$$

I pesi delle formule di N-C hanno la caratteristica di dipendere solo da n ed h, non da a, b

Infatti, consideriamo il caso delle formule chiuse. Posto $x = a + th \quad 0 \le t \le n$

$$w_i = \int_a^b l_i(x)\,dx \underset{\substack{x = a+th \\ dx = dt\cdot h}}{=} h \underbrace{\int_0^n \prod_{\substack{i \ne j \\ i,j=0}}^{n} \frac{t-j}{i-j}\,dt}_{\alpha_i} = h\alpha_i$$

$w_i = h\alpha_i \qquad \alpha_i =$ numeri di Côtes

α_i dipendono solo da i e n e non dai nodi x_i

La formula di quadratura di N-C

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

Come conseguenza dei polinomi di Lagrange su nodi equispaziati valgono

- $\alpha_i = \alpha_{n-i} \qquad i = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$
- $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = n$

perché

$$\sum_{i=0}^{n} \int_0^n l_i(t)\,dt = \int_0^n \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} l_i(t)\right)}_{=1} dt = n$$

Nel caso di formule aperte

$$\alpha_i = \int_{-1}^{n+1} \prod_{j \neq i} \frac{t-j}{i-j} \, dt \qquad (3)$$

nel caso particolare in cui $n=0$

essendo $l_0(t)=1$ dalla (3) si ha

$$\alpha_0 = 2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot dt$$

Ritorniamo alle formule chiuse

- $n=1$ $\quad x_0 = a \quad x_1 = b \quad h = b-a$

$$\alpha_0 = \int_0^1 (1-t)\, dt = \frac{1}{2} = \alpha_1$$

simmetria dei pesi di Côtes

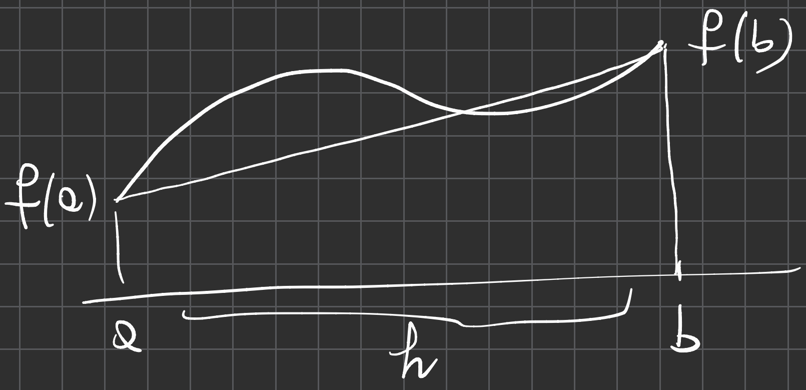
La formula di N-C corrispondente a $n=1$

$$I_1(f) = h\left(\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b)\right)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$\boxed{I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)}$$

FORMULA DEL TRAPEZIO



- $n=2$ $\quad x_0 = a \quad x_1 = \frac{a+b}{2} \quad x_2 = b$

$$\alpha_0 = \int_0^2 \frac{1}{2}(t-1)(t-2)\,dt = \frac{1}{3} = \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \int_0^2 t(2-t)\,dt = \frac{4}{3} \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

Da cui si ottiene la seguente formula

$$I_2(f) = h\left(\alpha_0 f(a) + \alpha_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \alpha_2 f(b)\right)$$
$$= \frac{h}{3}\left(f(a) + 4 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$\boxed{I_2(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2)\right)}$$

FORMULA DI (CAVALIERI) – SIMPSON

STIMA DELL'ERRORE DI QUADRATURA

Sia $f \in C^k[a,b]$ e $h = \frac{b-a}{n}$ allora

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - I_n(f) = \gamma_n h^{k+1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

$\xi \in (a,b)$

con

se n pari $\quad k = n+2, \quad \gamma_n = \int_0^n t\, \Pi_n(t)\, dt$

se n dispari $\quad k = n+1, \quad \gamma_n = \int_0^n \Pi_n(t)\, dt$

$$\Pi_n(t) = t(t-1)\dots(t-n)$$

Vediamo la stima per $n = 1, 2$

- $n = 1 \quad$ n dispari $\quad k = 2$

$$\gamma_1 = \int_0^1 t(t-1)\, dt = -1/6 .$$ Pertanto

l'errore con la formula del trapezio è

$$\boxed{R_1(f) = -\frac{1}{12} \cdot h^3 f''(\xi) \qquad \xi \in (a,b)}$$

$\Longrightarrow$ se f è un polinomio di grado 1

$R_1(f) = 0 \Longrightarrow$ è esatta sui polinomi di 1° grado

• $n=2$ $k=4$ n pari

$$J_2 = \int_0^2 t^2(t-1)\,dt = -\frac{4}{15}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_2(f) &= -\frac{4}{15}\frac{h^5}{24} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi\in(a,b) \\ &= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \end{aligned}}$$

Se f è un polinomio di grado 3, $f^{(4)}(\xi)=0$

$$\Longrightarrow \quad R_2(f)=0$$

grado di esattezza di Simpson è 3

Le formule di N-C sono più precise se n è pari con $n+1$ punti $(x_0, --, x_n$