Laboratorio di Calcolo Numerico: Integrazione e derivazione numerica

Giacomo Elefante

Laboratorio di calcolo numerico
11/01/24

Scopo di oggi

Analizzare algoritmi per l'integrazione e derivazione numerica:

- Metodo dei trapezi composito
- Metodo delle parabole (di Simpson) composito
- Approssimazione della derivata con rapporto incrementale simmetrico

Integrazione numerica

Due tipiche regole per approssimare integrali definiti, del tipo

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

sono quelle dei trapezi e di Simpson

- Trapezi
  La formula dei trapezi, esatta per polinomi di grado al più 1, corrisponde ad approssimare l'integrale I con

$$S^T = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

- (Cavalieri-)Simpson o metodo della parabola
  La formula di Simpson, esatta per polinomi di grado al più 3, corrisponde ad approssimare l'integrale I con

$$S^{CV} = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Integrazione numerica

Esercizio

Creare una function senza input e output, denominata `demo_quadratura`, dove viene approssimato l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x = \log(2)$$

con il metodo dei trapezi e con il metodo di Simpson. Mostrare a schermo i valori degli errori assoluti dei due metodi, usando il formato esponenziale con 1 cifra prima della virgola e 4 dopo.

Metodo trapezi composito

È possibile applicare tali formule suddividendo l'intervallo $[a, b]$ in N subintervalli aventi la stessa ampiezza e applicando le formule in ognuno di loro.

In tale modo l'integrale I è approssimabile attraverso la formula dei trapezi composta

$$S_N^T = \frac{h}{2} f(x_0) + hf(x_2) + \cdots + hf(x_{N-1}) + \frac{h}{2} f(x_N),$$

dove

- $x_k = a + k \cdot h, k = 0, \ldots, N,$
- $h = \frac{b-a}{N}.$

Per cui la formula è del tipo $\sum_{k=0}^{N} w_k f(x_k)$, e i valori w_k sono detti pesi e i punti x_K sono detti nodi.

In particolare i pesi sono

$$w_0 = w_N = \frac{h}{2}, \qquad w_i = h, i = 1, \ldots, N-1$$

```matlab
function [x,w] = trapezi_composta(a,b,N)

% Formula dei trapezi composta
% -----------------------------
% ---- input ----
% a,b : estremi di integrazione
% N : numero di subintervalli
%
% ---- output ----
% x : nodi di integrazione (vettore colonna)
% w : pesi di integrazione (vettore colonna)

% passo di integrazione
h = (b-a)/N;
% nodi di integrazione
x = a:h:b; x = x';
% pesi di integrazione
w = ones(N+1,1);
w(1) = 1/2; w(end) = 1/2;
w = w*h;

end
```

Figure: Codice per generare i nodi e i pesi del metodo dei trapezi composito.

Metodo Simpson composito

Similmente anche per il metodo di Simpson si può suddividere l'intervallo in subintervalli dove applicare il metodo.
In tale modo l'integrale I è approssimabile attraverso la formula di Simpson (delle parabole) composta

$$S_N^{CS} = \frac{h}{3} f(x_0) + \sum_{s=1}^{N-1} \frac{2h}{3} f(x_{2s}) + \sum_{s=0}^{N-1} \frac{4h}{3} f(x_{2s+1}) + \frac{h}{3} f(x_{2N}),$$

dove

- $x_k = a + k \cdot h, k = 0, \ldots, 2N,$
- $h = \frac{b-a}{2N}.$

Per cui la formula è del tipo $\sum_{k=0}^{N} w_k f(x_k)$, e i pesi sono

$$w_0 = w_{2N} = \frac{h}{3}, \quad w_i = \frac{2h}{3}, i \text{ è pari} \quad w_i = \frac{4h}{3}, i \text{ è dispari}$$

```
function [x,w] = simpson_composta(a,b,N)

% Formula dei trapezi composta
% ----------------------------
% ---- input ----
% a,b : estremi di integrazione
% N : numero di subintervalli
%
% ---- output ----
% x : nodi di integrazione (vettore colonna)
% w : pesi di integrazione (vettore colonna)

% passo di integrazione
h = (b-a)/(2*N);
% nodi di integrazione
x = a:h:b; x=x';
% pesi di integrazione
w = zeros(2*N+1,1);
% primo e ultimo peso
w(1) = h/3 ;
w(end) = h/3;
% pesi di indice pari
ind_pari = 2:2:2*N ;
w(ind_pari) = 4*h/3;
% pesi di indice dispari
ind_disp = 3:2:2*N-1;
w(ind_disp) = 2*h/3;

% In una riga
% w=h.*[1,repmat([4 2],1,N-1),4,1]./3;
```

Figure: Codice per generare i nodi e i pesi del metodo di Simpson composito.

Esercizio

Ripetere l'esercizio precedente creando una function `demo_quadratura2` dove vengono usate le formule di trapezi e Simpson compositi con $N = 1 : 20$ e dove viene creato un grafico in scala semilogaritmica dei due errori sovrapposti al crescere di N invece che le statistiche stampate a schermo.

Derivazione numerica

Una naturale formula per approssimare la derivata di una funzione è il rapporto incrementale, che può essere ad esempio il rapporto incrementale destro,

$$f'(x_0) \approx \delta(h)_+ = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

o il sinistro

$$\delta_-(h) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

che tendono a $f'(x_0)$ per $h \to 0$.
Per questa approssimazione è possibile dare una stima dell'errore, infatti abbiamo

$$\delta_+(h) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h), \quad \delta_-(h) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h).$$

È possibile però avere convergenza più veloce utilizzando il rapporto incrementale simmetrico

$$\delta(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Infatti, per $\delta(h)$ la stima dell'errore è

$$\delta(h) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

Esercizio

Esercizio

Usare il rapporto incrementale destro, sinistro e il rapporto incrementale simmetrico per approssimare la derivata di $f(x) = sin(x) + x$ nel punto $x_0 = 3$, per $h = 10^{-i}, i = 1 : 5$. Calcolare poi l'errore relativo al decrescere di h e fare un grafico in scala semilogaritmica dei tre errori.

Esercizio (per casa)

Esercizio

Si generi una function `RefineQuad` che dati in input

- `a,b` : estremi dell'intervallo di integrazione
- `f` : funzione integranda
- `formula` : : parametro per determinare il metodo da usare, 1-trapezi, 2-Simpson
- `tol` : tolleranza
- `maxN` : N relativo alla suddivisione massima

raffina il numero di intervalli, partendo da un unico intervallo e andando a raddoppiare le suddivisioni finché non viene raggiunta o una certa tolleranza sull'errore assoluto tra la quadratura ottenuta con l'ultima suddivisione e quella ottenuta con la suddivisione precedente, o il numero massimo di suddivisioni `maxN`. Si richiede inoltre che in output vengano restituite

- `integrale` : valore approssimato dell'integrale finale
- `I` : vettore contenente tutte le approssimazioni effettuate
- `step` : errore tra gli ultimi due raffinamenti
- `flag` : parametro per il raggiungimento della tolleranza, 0 - non raggiungimento, 1 - raggiungimento

Esercizio (per casa)

Esercizio

Applicare la funzione `RefineQuad` per calcolare l'integrale

$$\int_{-\sqrt{2}}^{1} |x|^{\alpha} = \frac{1 + 2^{(\alpha+1)/2}}{\alpha + 1}$$

con $\alpha = 1.1$, usando una tolleranza di 10^{-6} e `maxN`$= 1024$ sia con la formula di trapezi compositi e sia con Simpson composito.
Stampare poi a schermo un messaggio se i metodi hanno raggiunto la tolleranza e creare a schermo una tabella con il numero di intervalli utilizzati, il numero di punti, il valore dell'integrale approssimato e il valore dell'errore assoluto per entrambi i metodi.